SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
Avenida Água Verde, 2140
Telefone: (0XX) 41 3340-1500
80240-900 CURITIBA - PARANÁ
www.diaadiaeducacao.pr.gov.br

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA

eureka!

Física • Matemática

GOVERNO DO PARANÁ
EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA
TV Paulo Freire

Pré-vestibular

@ureka!

Matemática

Oslei Domingos

AULA Nº 01

"TUDO SÃO NÚMEROS"

Com esta frase, **PITÁGORAS** demonstrou aquilo que pensava sobre a Matemática, ou seja, que é uma linguagem universal ligada à natureza.

Quando estudamos música, por exemplo, estamos exercitando a Matemática no seu modo mais puro.

Quando estamos dirigindo um automóvel estamos, entre outras ações, tomando decisões através do raciocínio lógico, que faz parte da essência da Matemática.

Os grandes gênios da humanidade cortejaram a Matemática com célebres pensamentos:

- **GAUSS** disse: **"A Matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números** (aritmética) **é a rainha das matemáticas"**.
- Na entrada de sua academia **PLATÃO** mandou escrever: **"Não entre aqui quem ignora a geometria"**.
- **"Não há um ramo na matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real"**, pensamento de **LOBACHEVSKY**.
- Para **TALES DE MILETO, "a questão primordial não era o que sabemos, mas como sabemos".**

Matemática Básica

A matemática básica consiste numa importante ferramenta para resolução de problemas não só nas ciências exatas, mas em todas as áreas do conhecimento.

Teoria dos Conjuntos

Conjunto

Na matemática consideramos o conjunto como um ente primitivo, ou seja, aceitamos o mesmo sem definição.

Podemos, no entanto intuitivamente, dar exemplos de conjuntos como: conjuntos de objetos, de letras, de números, de pessoas, e assim sucessivamente.

Por estes motivos damos o nome de conjunto a qualquer agrupamento, associação, junção de objetos. Esses agrupamentos terão algum caráter comum. Os objetos serão chamados de elementos do conjunto.

Representação

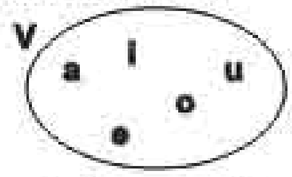
Um conjunto pode ser representado por uma letra maiúscula, em geral do alfabeto latino, e os elementos por uma letra minúscula. Os elementos são colocados entre chaves e separados por vírgulas.

Exemplo:

O conjunto das vogais: $\mathbf{V = \{a, e, i, o, u\}}$.

Podemos também dar uma característica dos elementos do conjunto: $\mathbf{V = \{x / x \text{ é vogal}\}}$.

E ainda podemos representar o conjunto por uma figura plana fechada que chamamos de diagrama de EULER-VENN.



Neste caso não há necessidade de separar os elementos com vírgula.

Para trabalharmos com conjuntos necessitamos de uma simbologia adequada que em grande parte foi elaborada pelo italiano **Giuseppe Peano**, (1858-1932), que foi um dos grandes estudiosos da teoria dos conjuntos, deixando uma valiosa colaboração a respeito da mesma.

Simbolos

$\in$: pertence	$\exists$: existe
$\notin$: não pertence	$\nexists$: não existe
$\subset$: está contido	$\forall$: para todo ou qualquer que seja
$\not\subset$: não está contido	$\varnothing$: conjunto vazio
$\supset$: contém	$\not\supset$: não contém
/: tal que	$\Leftrightarrow$: se, e somente se
$\Rightarrow$: implica que	

Símbolos Das Operações

$A \cap B$	A intersecção B
$A \cup B$	A união B
$a - b$	diferença de A com B
$a < b$	a menor que b
$a \leq b$	a menor ou igual a b
$a > b$	a maior que b
$a \geq b$	a maior ou igual a b
$a \wedge b$	a e b
$a \vee b$	a ou b

- Relação de **Pertinência**

Para indicar que um **elemento** "x" pertence ao **conjunto** "A", escreve-se: $x \in A$

Para exprimir **elemento** "x" não pertence ao **conjunto** "A", escreve-se: $x \notin A$.

Exemplo:

$A = \{1,3,9,15\}$

No conjunto A, temos que:

9 pertence a A e você vai indicar $\mathbf{9 \in A}$.

6 não pertence a A e você vai indicar $\mathbf{6 \notin A}$.

- Relação de **Inclusão**

Para indicar que um **conjunto** "B" está contido num **conjunto** "A", escreve-se: $B \subset A$.

Para exprimir que um **conjunto** "B" não está contido num **conjunto** "A", escreve-se: $B \not\subset A$.

Podemos, no entanto, representar a idéia anterior de outra forma:

Para indicar que um **conjunto** "A" contém um **conjunto** "B", escreve-se: $A \supset B$.

Para exprimir que um **conjunto** "A" não contém um **conjunto** "B", escreve-se: $A \not\supset B$

Conjunto Unitário

É o conjunto que possui um só elemento:

Exemplo:

P = {x / x simboliza o atual Papa}.

$S = \{7\}$

Conjunto Vazio

É o conjunto que não possui elementos.

Símbolo: $\varnothing$ ou { }

Conjunto Infinito

É o conjunto que possui infinitos elementos.

Exemplos:

I. $A = \{x \,/\, x > 1\}$

II. $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

Conjunto Finito

É o conjunto que possui um número determinado de elementos.

Exemplos:

I. $C = \{-4, 0, 3, 5\}$

II. D = {x / x é consoante}

União de Conjuntos

Dados dois conjuntos "A" e "B", chama-se união desses conjuntos, e escreve-se $A \cup B$, ao conjunto constituído pelos elementos de "A" ou de "B".

$$\mathbf{A \cup B = \{x \,/\, x \in A \ \text{ ou } \ x \in B\}}$$

Exemplos:

I. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

II. $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{7, 8\}$

$A \cup B = \{3, 4, 5, 7, 8\}$

Intersecção de Conjuntos

Dados dois conjuntos "A" e "B", chama-se intersecção desses conjuntos, e escreve-se $A \cap B$, ao conjunto constituído pelos elementos comuns de "A" e de "B".

$$\mathbf{A \cap B = \{x \,/\, x \in A \ \text{ e } \ x \in B\}}$$

Exemplos:

Achar o conjunto intersecção nos casos seguintes:

1) $A = \{1, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{2, 3, 5, 8, 10\}$

$A \cap B = \{8, 10\}$

2) $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ e $B = \{4, 6\}$

$A \cap B = \{4, 6\} = B$

- Para calcular o número de subconjuntos de um conjunto dado podemos utilizar a relação $\mathbf{2^n}$, onde **n** representa o número de elementos do conjunto dado.

Exemplo

O conjunto A = {a,b,c} possui 8 subconjuntos: {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}, Ø.

Como o conjunto A possui 3 elementos, teremos: $\mathbf{2^n = 2^3 = 8}$

- Ao conjunto formado pelos subconjuntos {{a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}, Ø}, damos o nome de conjunto das partes de A.

Complementar

O complemento (ou complementar) de um conjunto "A", em relação a um conjunto "B", assim se define:

$$\mathbf{C_B^A = B - A}$$

Exemplo:

1) $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$C_B^A = B - A = \{1,3\}$

Observação: O complementar de um conjunto A, por exemplo, também pode ser representado por $\overline{A}$.

Conjuntos Numéricos

Números Naturais (N)

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...}

N* o asterisco representa o conjunto dos números naturais sem o elemento zero (o que significa o conjunto dos números naturais não nulos, {1,2,3,4,5,...}).

Números Inteiros (Z)

Z = {..., –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

Z* representa o conjunto dos números inteiros sem o zero (números inteiros não nulos), {...-3, -2, -1, 1, 2, 3,...}

$\mathbf{Z_+}$ representa o conjunto dos números inteiros não negativos = {0, 1, 2, 3,...} .

$\mathbf{Z_-}$ representa o conjunto dos números inteiros não positivos, {...,-3,-2, -1, 0}.

$\mathbf{Z^*_+}$ representa o conjunto dos números inteiros positivos, {1, 2, 3,...}

$\mathbf{Z^*_-}$ representa o conjunto dos números inteiros negativos, {...,-3,-2,-1}

Números Racionais (Q)

São todos os números inteiros (Z) e todos os números que podem ser representados (escritos) na forma de fração e as próprias frações.

Exemplos:

Frações: $\{\frac{3}{4}; \frac{14}{5}; 7\frac{2}{3}; \frac{1}{8}; \frac{7}{1};...\}$
Decimal finito: {0,25; 12,8; 1,33; ...}
Dízimas periódicas: {0,333...; 1,2454545...; 7,123444...; ...}

Q* representa o conjunto dos números inteiros sem o zero (números racionais não nulos).

$\mathbf{Q_+}$ representa o conjunto dos números racionais não negativos.

$\mathbf{Q_-}$ representa o conjunto dos números racionais não positivos.

$\mathbf{Q^*_+}$ representa o conjunto dos números racionais positivos.

$\mathbf{Q^*_-}$ representa o conjunto dos números racionais negativos.

Números Irracionais (Ir)

São todas as raízes não exatas e os números transcendentes, como exemplo o número $\pi = 3,14159...$; o número e = 2,718182....; etc

Ir* representa o conjunto dos números irracionais sem o zero (números irracionais não **nulos).**

$\mathbf{Ir_+}$ representa o conjunto dos números irracionais não negativos .

$\mathbf{Ir_-}$ representa o conjunto dos números irracionais não positivos.

$\mathbf{Ir^*_+}$ representa o conjunto dos números irracionais positivos.

$\mathbf{Ir^*_-}$ representa o conjunto dos números irracionais negativos.

Números Reais (R)

Todos os números acima citados: N, Z, Q e Ir, são números reais.

R* representa o conjunto dos números reais sem o zero (números reais não nulos).

$\mathbf{R_+}$ representa o conjunto dos números reais não negativos .

$\mathbf{R_-}$ representa o conjunto dos números reais não positivos.

$\mathbf{R^*_+}$ representa o conjunto dos números reais positivos.

$\mathbf{R^*_-}$ representa o conjunto dos números reais negativos.

Números Pares E Ímpares;

NÚMERO PAR é todo aquele cujo algarismo da unidade é: 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8.
NÚMERO ÍMPAR é todo número cujo algarismo da unidade é: 1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9.

Por exemplo:

2248 é par (termina em 8), mas 23546801 é ímpar (termina em 1).

Números Primos

São todos os números inteiros **n** maiores do que um, divisíveis por 1 e pelo próprio número **n**.

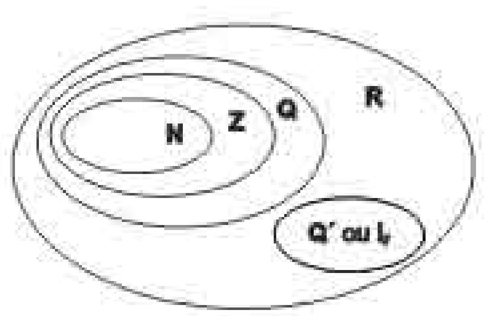
{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; ...}

Observações:

O número 2 é o único primo par.

Por convenção o número 1 não é primo.

Diagrama dos Números Reais



$N \subset Z \subset Q \subset R$ e $Q' \subset R$

Critérios de Divisibilidade

I) Um número **inteiro n é divisível por 2** quando o algarismo da unidade é: 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8 (par).

II) Um número **inteiro n é divisível por 3** quando a soma dos seus algarismos é um número divisível por 3.

III) Um número **inteiro n é divisível por 4** quando os dois últimos algarismos (direita) forem 00 ou os dois últimos algarismos (direita) formarem um número divisível por 4.

IV) Um número **inteiro n é divisível por 5** quando o algarismo das unidades é: 0 ou 5.

V) Um número **inteiro n é divisível por 6** quando é divisível simultaneamente, por 2 e por 3.

VI) Um número **inteiro n é divisível por 7** quando a diferença entre o número que se obtém de n suprimindo o algarismo das unidades e o dobro deste algarismo suprimido de n, resulta num número divisível por 7.

VII) Um número **inteiro n é divisível por 8** quando termina em 000, ou quando o número formado pelos três últimos algarismos (direita) for divisível por 8.

VIII) Um número **inteiro n é divisível por 9** quando a soma dos seus algarismos é um número divisível por 9.

IX) Um número **inteiro n é divisível por 10** quando o algarismo das unidades é: 0 (zero).

X) Um número **inteiro n é divisível por 15** quando é divisível simultaneamente, por 3 e por 5.

Operações com números e suas propriedades

Numeros consecutivos, sucessor e antecessor

Dois números naturais são consecutivos quando entre eles não houver outro número natural.

Exemplo:

2 e 3 são números consecutivos pois entre eles não há outro número natural

4 e 9 não são números consecutivos pois entre eles existem o 5, 6, 7 e 8.

Chamamos o número 2 de antecessor do número 3, e respectivamente o número 3 de sucessor do número 2.

Se tivermos três números consecutivos, denominando o número do meio de n, seu antecessor será (n-1) e seu sucessor será (n+1).

Observação:

Também em Z (conjunto dos números inteiros),tem-se os números ($\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$), consecutivos e por sua vez o sucessor e o antecessor de um número. Exemplo:

–3 e –2 são números consecutivos, -3 e antecessor de –2 e este por sua vez e sucessor daquele.

Valor absoluto e valor relativo

Valor Absoluto - e a quantidade real que o número representa não importando a sua posição.

Valor Relativo ou Posicional – depende da posição do algarismo dentro do número. E o valor absoluto multiplicado pela posição.

Por exemplo, pode-se descrever o número 123456

1	2	3	4	5	6
Ordem das centenas	Ordem das dezenas	Ordem das unidades	Ordem das centenas	Ordem das dezenas	Ordem das unidades
Classe dos milhares			Classe das unidades simples		

Observações:

I) Podemos ter classes maiores tais como: milhões, bilhões, trilhões, etc.

II) O número acima pode ser lido das seguintes formas: Cento e vinte e três mil, quatrocentos e cinqüenta e seis, ou mesmo, uma centena de milhar + duas dezenas de milhar + três unidades de milhar + quatro centenas+ cinco dezenas + seis unidades.

III) O valor absoluto de 6 no número dado é 6, o valor absoluto de 5 é 5, o valor absoluto de 4 é 4; o valor absoluto de 3 é 3; o valor absoluto de 2 é 2; o valor absoluto de 1 é 1.

IV) O valor relativo de 6 no número dado é 6, o valor relativo de 5 é 50 (5 x 10), o valor relativo de 4 é 400 (4 x 100); o valor relativo de 3 é 3.000 (3 x 1.000); o valor relativo de 2 é 20.000 (2 x 10.000); o valor relativo de 1 é 100.000 (1 x 100.000).

Adição

Operação onde adicionamos dois ou mais números obtendo como resultado sua soma.

Exemplos:

4 (parcela) + 5 (parcela) = 9 (soma ou total)
3 (parcela) + 2 (parcela) + 7 (parcela) = 12 (soma ou total)

–3 + 4 = 1 (observe que temos um numero negativo sendo somado a um número positivo, o sinal que prevalece é daquele que contiver maior valor absoluto).

Propriedades da adição

Comutativa – a ordem das parcelas não altera a soma.

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

$$\mathbf{5 + 7 = 7 + 5 = 12}$$

Associativa – é possível somar três ou mais parcelas, duas a duas, sem alterar a soma.

$$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

$$\mathbf{(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3) = 6}$$

Elemento Neutro – qualquer número somado com zero dará o próprio número.

$$\mathbf{5 + 0 = 5}$$

$$\mathbf{-6 + 0 = -6}$$

Subtração

Minuendo – subtraendo = diferença, resto, sobra, excesso.

5 (minuendo) – 3 (subtraendo) = 2 (diferença)

–3 – (+5) = –8

(–3 subtraído do número positivo 5 = –3 – 5 = –8)

Observação:

I) A subtração não apresenta as propriedades: comutativa, associativa e elemento neutro.

II) Podemos fazer a prova real, minuendo menos subtraendo e igual a diferença se diferença mais o subtraendo for igual ao minuendo.

$$\mathbf{M - S = D \quad se \quad M = S + D}$$

$$\mathbf{5 - 3 = 2 \quad se \quad 5 = 3 + 2}$$

Multiplicação

7 (fator) x 3 (fator) = 21 (produto ou múltiplo)

6 (fator) x 9 (fator) x 2 (fator) = 108 (produto ou múltiplo)

(-3) (fator) x (+4) (fator) = (-12) (produto ou múltiplo)

Atenção para a regra dos sinais, tanto para multiplicação quanto para a divisão:

Número A	Número B	A x B ou A / B
+ (positivo)	+ (positivo)	+ (positivo)
- (negativo)	- (negativo)	+ (positivo)
+ (positivo)	- (negativo)	- (negativo)
- (negativo)	+ (positivo)	- (negativo)

Propriedades da Multiplicação

Comutativa - a ordem dos fatores não altera o produto.

$$\mathbf{a \times b = b \times a}$$

$$\mathbf{5 \times 7 = 7 \times 5 = 35}$$

Associativa– é possível multiplicar três ou mais fatores, dois a dois, sem alterar o produto.

$$\mathbf{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)}$$

$$\mathbf{(4 \times 2) \times 3 = 4 \times (2 \times 3) = 24}$$

Elemento Neutro – qualquer número multiplicado por um dará o próprio número.

$$\mathbf{5 \times 1 = 5}$$

$$\mathbf{-6 \times 1 = -6}$$

Distributiva em relação a uma adição ou subtração – o produto de um número por uma adição (ou subtração) de outros números pode ser encontrado fazendo-se a multiplicação desse número por cada um dos termos da soma (ou diferença) obtendo-se produtos que depois deverão ser somados (ou subtraídos) para chegar ao resultado.

$$\mathbf{3 \times (2+5) = 3 \times 2 + 3 \times 5 = 6 + 15 = 21}$$

$$\mathbf{4 \times (7 - 3) = 4 \times 7 - 4 \times 3 = 28 - 12 = 16}$$

Neste caso, ainda é possível resolver primeiro o que está dentro do parênteses.

$$\mathbf{3 \times (2+5) = 3 \times 7 = 21}$$

$$\mathbf{4 \times (7 - 3) = 4 \times 4 = 16}$$

Divisão

O dividendo dividido pelo divisor dá como resultado o quociente e ainda sobra o resto.

33 (Dividendo)	7 (Divisor)
5 (Resto)	4 (Quociente)

Outra forma de representar a divisão é dada por:

$$\mathbf{Dividendo = divisor \times quociente + resto}$$

$$\mathbf{(D = d \times q + r)}$$

$$\mathbf{33 = 7 \times 4 + 5}$$

Observações 1:

I) A divisão que apresenta resto, denominamos de divisão aproximada ou não exata.

II) A divisão que não apresenta resto denomina-se divisão exata.

Observações 2:

I) O resto nunca poderá ser maior ou igual ao divisor, ou seja, o maior resto possível será sempre o divisor menos um.

O número 34 dividido por 5 é igual a 6 com resto 4, 4 é o maior resto na divisão por 5 pois se aumentarmos o número (34 + 1) ele novamente poderá ser dividido por 5 e apresentar resto zero, 34 + 1 = 35 dividido por 5 é igual a 7 com resto zero.

II) A divisão não apresenta as propriedades: comutativa, associativa e elemento neutro.

III) Atente para a regra dos sinais.

Expressões Numéricas

São as expressões formadas por números mais símbolos (que indicam as operações), as expressões numéricas devem seguir determinada hierarquia, a saber:

1º) Resolve-se a potenciação e a radiciação

2º) Resolve-se a multiplicação e a divisão

3º) Resolve-se a adição e a subtração

Não se deve esquecer que podem aparecer pontuações matemáticas:

1º) Resolve-se o que estiver entre parênteses ( )

2º) Resolve-se o que estiver entre colchetes [ ]

3º) Resolve-se o que estiver entre chaves { }

Exemplos:

a) $2^2 + 5 \times 3 = 4 + 5 \times 3 = 4 + 15 = 19$

b) $8/4 - 2 = 2 - 2 = 0$

c) $(2+5) \times 3 = 7 \times 3 = 21$

d) $\{2 + [10 - 3 \times (8/4 + 1)] - 1\} = \{2 + [10 - 3 \times (2+1)] - 1\} = \{2 + [10 - 3 \times 3] - 1\} = \{2 + [10 - 9] - 1\} = \{2 + 1 - 1\} = 2$

Se houver coincidência de prioridades dentro de uma mesma operação, resolver o que vier primeiro, ou seja, o que aparecer primeiro da esquerda para a direita (como lemos).

36 / 6 x 4 (apareceram a divisão e a multiplicação, e ambas tem a mesma prioridade, faço o que apareceu primeiro da esquerda para a direita), logo: 36 / 6 x 4 = 6 x 4 = 24.

Frações

O símbolo $\frac{a}{b}$ significa **a:b**, ou **a/b,**

lê-se a dividido por b, sendo **a** e **b** números naturais e b diferente de zero.

Chamamos: $\frac{a}{b}$ de fração;

onde **a** é o numerador e **b** é o denominador.

Observações:

I) Se a é múltiplo de b, então é um número natural.

Exemplo:

A fração 6/2, onde 6 é o numerador e 2 é o denominador (6 e múltiplo de 2). Logo, ao efetuar a divisão de 6 por 2, obteremos o quociente 3. Assim, 6/2 é um número natural.

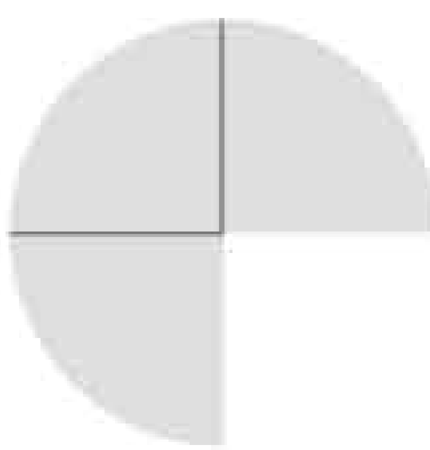
ii) mais adiante estudaremos uma fração muito especial, denominada razão, mas desde já saiba que fração e razão não são a mesma coisa (a fração representa a divisão de dois números quaisquer, enquanto a razão representa a divisão entre duas grandezas).

O significado de uma fração

Já vimos que a/b pode ser um número natural, mas nem sempre isto acontece. Nestes casos, o que se entende por a/b?

A fração envolve a seguinte idéia: **dividir algo em partes iguais**. Dentre essas partes, consideramos **uma** ou **algumas**, conforme nosso interesse.

Exemplo: Rubens comeu 3/4 de uma pizza. Isso significa que, ao dividir a pizza em 4 partes iguais, Rubens comeu 3 partes:



Na figura acima, as partes pintadas seriam as partes comidas por Rubens, e a parte branca é a parte que sobrou da pizza.

Como ler uma fração?

As frações recebem nomes especiais quando os denominadores são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e também quando os denominadores são múltiplos de 10 (10, 100, 1000,...)

1/1	Um inteiro	1/7	Um sétimo
1/2	Um meio	1/8	Um oitavo
1/3	Um terço	1/9	Um nono
1/4	Um quarto	1/10	Um décimo
1/5	Um quinto	1/100	Um centésimo
1/6	Um sexto	1/1000	Um milésimo

Classificação das Frações

As frações podem ser classificadas como ordinárias, decimais, próprias, impróprias, aparentes, equivalentes.

Fração ordinária – fração cujo denominador não é múltiplo de 10:

Exemplo: 2/4; 5/8 e 12/8.

Fração decimal – fração cujo denominador e múltiplo de 10:

Exemplo: 1/10; 2/100 e 45/1000.

Fração própria é aquela em que o numerador é menor que o denominador: P.ex. 5/6; 12/15 e 1/2.

Fração imprópria é aquela em que o numerador é maior ou igual ao denominador: P.ex. 15/12; 3/2 e 5/3.

Obs.: As frações impróprias podem ser representadas como números mistos, ou seja, aqueles que apresentam uma parte inteira e outra fracionária.

Exemplo $\frac{12}{7} = 1\ \frac{5}{7}$

Fração aparente é aquela em que o numerador é múltiplo do denominador.
P. ex. 15/3 = 5 e 6/2 = 3.

Frações equivalentes são frações que representam a mesma parte do todo.

Exemplo $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ são frações equivalentes.

Para encontrar frações equivalentes basta multiplicar (ou dividir) o numerador e o denominador da fração por um mesmo número natural, diferente de zero.

Exemplo:

Obter frações equivalentes à fração 1/2.

$\frac{1.3}{2.3} = \frac{3}{6}$

Simplificando Frações

Uma fração equivalente a 12/15, com termos menores, é 4/5. A fração 4/5 foi obtida dividindo-se ambos os termos da fração 12/15 pelo fator comum 3. Dizemos que a fração 4/5 é uma fração simplificada de 12/15.

A fração 4/5 não pode ser simplificada, por isso é chamada de fração irredutível. A fração 4/5 não pode ser simplificada porque 4 e 5 são números primos entre si.

Números Fracionários

São os números que resolvem equações do tipo:

7 . N = 1 logo somente se N = 1/7 que a equação se resolve, observe que N é um número fracionário com numerador igual a um e denominador igual a sete.

Múltiplo de um Número

O conjunto dos números múltiplos de n, é o conjunto formados por todos os números obtidos multiplicando-se n pelos números naturais.

Exemplo

Múltiplos de 6: {0, 6, 12, 18, 24, 30,...}

Múltiplos de 4: {0, 4, 8, 12, 16, 20, 24,...}

Múltiplos comuns de 4 e 6: {0, 12, 24,...}

Dentre estes múltiplos, diferentes de zero, 12 é o menor deles. Chamamos o 12 de mínimo múltiplo comum de 4 e 6.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

É o menor número divisível por todos os números envolvidos

Para obter o MMC de 20, 15 e 25, divide-se simultaneamente os números envolvidos por fatores primos e, o MMC será o produto desses primos usados na fatoração comum.

20-	**15-**	**25**	**2**
10-	**15-**	**25**	**2**
5-	**15-**	**25**	**3**
5-	**5-**	**25**	**5**
1-	**1-**	**5**	**5**

MMC(20,15,25)=300, observe que o produto dos divisores: 2.2.3.5.5=300

Máximo Divisor Comum (MDC)

É o maior número que divide ambos os números envolvidos.

Para obter o MDC de 84 e 90, fatora-se separadamente os números envolvidos e, o MDC será obtido pelo produto dos divisores comuns observados nas fatorações.

84	**2**	**90**	**2**
42	**2**	**45**	**3**
21	**3**	**15**	**3**
7	**7**	**5**	**5**
1		**1**	

MDC (84, 90)=2.3=6, observe que 2 e 3 são divisores comuns em ambas as fatorações.

Adição e Subtração de Números Fracionários

Analisemos dois casos:

I) Sendo os denominadores iguais.

Para somar frações com denominadores iguais basta somar os numeradores e conservar o denominador.

Para subtrair frações com denominadores iguais basta subtrair os numeradores e conservar o denominador.

Exemplos:

1) $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

2) $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{1}{5}$

II) Sendo os denominadores diferentes

Para somar frações com denominadores diferentes, uma solução é obter frações equivalentes, de denominadores iguais ao MMC (mínimo múltiplo em comum) dos denominadores das frações.

Exemplo:

Somar as frações $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{2}$.

Obtendo o MMC dos denominadores temos MMC(5, 2) = 10.

$\frac{4}{5}+\frac{5}{2}=\frac{4.2 \quad 5.5}{10}=\frac{8+25}{10}=\frac{33}{10}$

Resumindo:

Utilizamos o MMC para obter as frações equivalentes e depois somamos normalmente as frações, que já terão o mesmo denominador, ou seja, utilizamos o caso (I).

Multiplicação de Números Fracionários

Na multiplicação de números fracionários, devemos multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador, assim como é mostrado no exemplo que segue.

$\frac{8}{3}\text{x}\frac{4}{3}=\frac{8 \text{ x. } 4}{3 \text{ x. } 3}=\frac{8\text{x}4}{3\text{x}3}=\frac{32}{9}$

Divisão de Números Fracionários

Na divisão de números fracionários, devemos multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda, como é mostrado no exemplo que segue.

$\frac{8}{3}:\frac{4}{3} \text{ ou } \frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{8}{3}\text{x}\frac{3}{4}=\frac{24}{12}=2$

Potenciação

Definição

$a^n = a \text{ x } a \text{ x } a \text{ x } ... \text{ x } a$

n fatores n> 1

$a^1 = a$ e $a^{zero} = 1$

Propriedades

1) $a^m \text{ x } a^n = a^{m+n}$

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ com $a > 0$

3) $a^n \text{ x } b^n = (a \text{ x } b)^n$

4) $a^n \text{ x } b^n = (a \text{ x } b)^n$ com $b > 0$

5) $(a^n)^m = a^{n\text{x}m}$

Conceito

A potenciação representa, de forma resumida, uma multiplicação de números iguais.

$\mathbf{3^5 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3.\, 3.\, 3 = 243}$

As principais regras gerais da potenciação conhecidas são:

1) Potência de um número.

$a^n = a \,.\, a \,.....\, a \qquad 2^3 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 8$

2) Todo número elevado a zero é igual a 1.

$a^0 = 1 \qquad 1^0 = 1; \qquad 2^0 = 1;$

3) Todo número elevado a um é igual a ele mesmo.

$a^1 = a \qquad 1^1 = 1; \qquad 2^1 = 2;$

4) Calculando o inverso de um número.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \; a > 0 \qquad 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

5) Multiplicação de potência de mesma base.

$a^n \,.\, a^m = a^{n+m} \qquad 2^2 \,.\, 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

6) Divisão de potência de mesma base.

$a^n : a^m = a^{n-m} \rightarrow 2^3 : 2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2$

7) Potência da potência.

$(a^m)^n = a^{m.n} (2^2)^3 = 2^6 = 64$

8) Potência de um número fracionário

Na potenciação, quando elevamos um número fracionário a um determinado expoente, estamos elevando o numerador e o denominador a esse expoente, conforme os exemplos abaixo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

RADICIAÇÃO

Definição

$\sqrt[n]{a} = x \Rightarrow x^n = a$

Propriedades

1) $\sqrt[n]{a} \text{ x } \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\text{x}b}$

2) $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$

3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\text{x}m]{a}$

4) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p\text{x}n]{a^{p\text{x}m}} = (p \neq 0)$

5) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

1) Potência de um expoente racional

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$

2) Radiciação de um número fracionário

Na radiciação, quando aplicamos a raiz quadrada a um número fracionário, estamos aplicando essa raiz ao numerador e ao denominador, conforme o exemplo abaixo:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ com } b \neq 0 \quad \frac{\sqrt{25}}{64} = \frac{5}{8}$$

Você sabia...

Que para calcular as raízes quadradas de 100, 121, 144, 169, 400, 441, 484, 900, 961, basta calcular as raízes dos algarismos situados nos extremos, e com os resultados obtidos formar a dezena que é o resultado desejado.

EXERCÍCIOS

01. Complete o quadro, conforme divisibilidade, por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 15.

a) 472 é divisível por: _______
b) 721 é divisível por: _______
c) 46 é divisível por: _______
d) 58 é divisível por: _______
e) 1520 é divisível por: _______
f) 134 é divisível por: _______
g) 10000 é divisível por: _______
h) 2725 é divisível por: _______
i) 3.000.000 é divisível por: _______
j) 61.366 é divisível por: _______

02. Qual o menor número que se deve somar a 31420 para que resulte em um número divisível por 3?

03. Da sua casa até seu local de trabalho são 3,620 km. Você faz esse trajeto a pé. Trabalhando de segunda a sexta-feira e indo almoçar em casa todos os dias, por semana você anda quantos metros.

a) 72.400 m
b) 7.240 m
c) 36.400 m
d) 18.200 m

04. Efetue as operações indicadas a seguir:

a) 6,28 : 4	
b) 4,617 : 5,7	
c) 3,15 : 1,5	
d) 0,54 : 0,3	
e) 7,232 : 0,4	
f) 1 : 0,0102	

05. Após recortadas as peças, para montar uma esquadria, o serralheiro leva 3 horas e 45 minutos. Se começou o serviço às 7 horas e 25 minutos, concluiu sua tarefa às:

a) 11 horas
b) 11 horas e 10 minutos
c) 10 horas e 10 minutos
d) 10 horas

06. Efetue a operação indicada: 0,0004 : 0,0002.

07. O inverso de 0,25 é:

08. O oposto de 7 é:

09. Sua repartição recebeu 378 frascos de produtos de limpeza. Você deverá guardá-los em 3 estantes de modo que todas elas fiquem com a mesma quantidade de frascos. Como já havia em estoque 57 frascos, em cada estante você colocou:

a) 160 frascos
b) 154 frascos
c) 145 frascos
d) 164 frascos

10. Somando-se os resultados de 4 872 : 2 4 e 1 177 : 11, obtém –se :

a) 382
b) 310
c) 204
d) 38

11. Qual é s sentença verdadeira?

a) $2{,}01 = 2\,\frac{2}{100}$
b) 0,23 = 20/10 + 3/100
c) 0,27 = 2/10 + 7/10
d) 10/100 = 1,0

12. A divisão 654 : 9 870 tem o mesmo resultado que:

a) 0,654 : 0 987
b) 65,4 : 9,87
c) 65,4 : 98,7
d) 6,54 : 98,7

13. O resultado de 64 - 8 : 0,16 é um número compreendido entre:

a) 50 e 60
b) 40 e 50
c) 30 e 40
d) 20 e 30
e) 10 e 20

14. O valor da expressão (1 - 0,3) x (3 - 1,4) + 1,83 é:

a) 2,95
b) 7,25
c) 11,07
d) 13,03

15. Sabendo-se que:

- a porção individual de bolachas a ser servida para as crianças é de 80 gramas.
- na despensa há caixas de bolachas de 2 kg .
- para o café da manhã de 125 crianças serão necessárias x caixas de bolacha. Calcule o valor de x.

a) 5 caixas
b) 4 caixas
c) 6 caixas
d) 3 caixas

AULA Nº 02

FUNÇÕES

***René Descartes** (1596-1650)*

Considerado por muitos como um dos maiores filósofos de todos os tempos, René Descartes foi também um matemático brilhante.

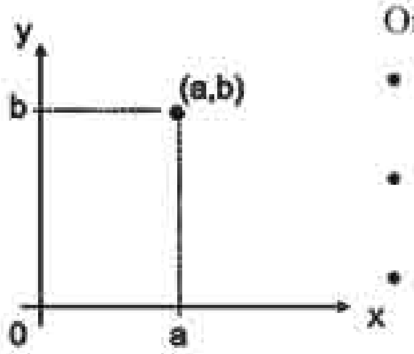
Dentre muitas de suas descobertas matemáticas está a criação de um sistema de coordenadas para localização de pontos e representação gráfica dos mesmos.

Sistema este batizado posteriormente de **sistema cartesiano**.

Par Ordenado e Sistema Cartesiano

A partir de dois elementos **a** e **b** podemos formar um terceiro elemento **(a, b)**, que será chamado de **par ordenado**.

Podemos representar o par ordenado no sistema cartesiano, que consiste num par de eixos ortogonais (90°), da seguinte forma:



Onde:

- eixo **x** será chamado de eixo das abcissas.
- eixo **y** será chamado de eixo das ordenadas.
- Os valores de **a** e **b** serão as coordenadas do ponto (a,b).

Produto Cartesiano

Dados dois conjuntos A e B não vazios, denominamos produto cartesiano de A por B o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) tais que: **A x B = {(x, y) / xA e yB}**

Exemplo:

Dados A = {1, 2, 3} e B = {3, 4}, encontre A x B:

A x B = {(1,3) , ((1,4) , (2,3) , (2,4) , (3,3) , (3,4)}

Noções Sobre Funções

Quando ouvimos num noticiário de TV a informação de que o "buraco" na camada de ozônio está aumentando em **função** do aumento da poluição mundial, estamos relacionando duas grandezas onde uma varia em **função** da outra.

Podemos estender este raciocínio para outras grandezas como por exemplo, a variação:

- Do Real em **função** da valorização do Dólar.
- Da temperatura de uma cidade em **função** da chegada de uma frente fria.
- Do peso de uma pessoa em **função** de sua alimentação.
- Da quantidade de calças vendidas em **função** de uma promoção.

E tantos outros exemplos que poderíamos citar.

Para melhor representarmos a relação que existe entre duas grandezas, utilizaremos uma tabela, conforme exemplo a seguir.

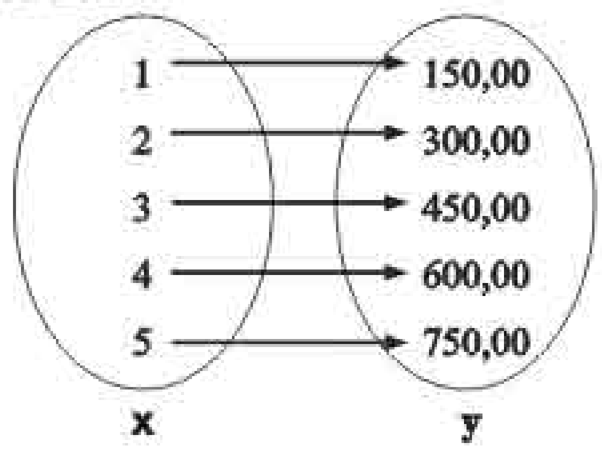
1. Edgar é um vendedor que recebe seu salário em função da quantidade de computadores que vende. Para cada computador vendido Edgar recebe R$ 150,00.

Construindo a tabela teremos:

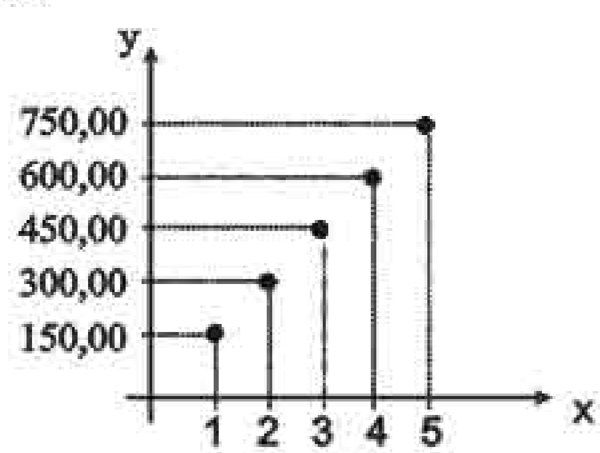
Computadores vendidos	x	1	2	3	4	5
Salário de Edgar (R$)	y	150,00	300,00	450,00	600,00	750,00

Observe que representaremos por **x** a quantidade de computadores vendidos e **y** o salário de Edgar, em função das vendas.

Que podemos representar com diagrama de setas ou flechas:



E ainda podemos construir um gráfico cartesiano:



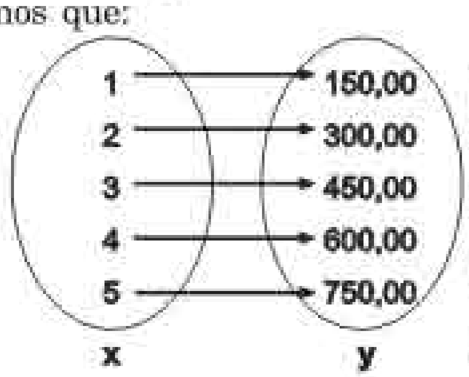
Definição

Dados dois conjuntos **A** e **B**, não vazios, teremos uma função de A para B quando para todo elemento do conjunto A existir um único correspondente no conjunto B.

Notações

$f : A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ ou ainda $f(x) = y$

No diagrama usado no exemplo anterior, temos que:



f(1) = 150,00

f(2) = 300,00

f(3) = 450,00

f(4) = 600,00

f(5) = 750,00

- Damos o nome de **DOMÍNIO** aos elementos de onde saem as flechas (**x**).
- Chamaremos de **IMAGEM** aos elementos onde chegam as flechas (**y**).
- E o **CONTRA-DOMÍNIO** é formado por todos os elementos do conjunto de chegada das flechas.

EXERCÍCIOS

01) (UEL –PR) – Sejam os conjuntos A e B tais que $A \times B = \{(-1, 0), (2, 0), (-1, 2), (2, 2), (-1, 3), (2, 3)\}$. O número de elementos do conjunto $A \cap B$ é:

02) (FEPAR –PR) – Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ e as relações $R_1 = \{(x, y) \in A \times B / y = x^2 - 1\}$ e $R_2 = \{(x, y) \in B \times C / y = 2x + 2\}$.

Determinando-se $R_1 \cap R_2$, obtém-se:

03) (UTFPR) – O valor do parâmetro n, de modo que a reta $3nx + 5y + n - 2 = 0$ passa pelo ponto A(1; 1), é:

a) $n = 1$

b) $n = -1$

c) $n = -\frac{3}{4}$

d) $n = \frac{1}{2}$

e) $n = \frac{3}{2}$

04) (UFPR) – Com relação aos conjuntos $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $B = \{1,3,5\}$ é correto afirmar:

01) O conjunto A x B é igual ao conjunto B x A.

02) $A \subset B$

04) $(A \cap B) \cup A = A$

08) O número de elementos do conjunto A x B é igual a 18.

05) (UFPR) – Considere os seguintes conjuntos, onde IR indica o conjunto dos números reais e Z o dos números inteiros:

$A = \{x \in IR / x - 1 \geq 0\}$, $B = \{x \in Z / -3 < x < 3\}$ e $C = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

É correto afirmar que:

a) $A = [-1, \propto)$

b) $3 \in B$

c) $A \cap B =$

d) $A \cup C = A$

e) O produto cartesiano B x C tem 30 elementos.

06) (UEL –PR) – Uma turma de torcedores de um time de futebol quer encomendar camisetas com o emblema do time para a torcida. Constataram com um fabricante que deu o seguinte orçamento:

- Arte final mais serigrafia: R$ 90,00, independente do numero de camisetas.
- Camiseta costurada, fio 30, de algodão: R$ 6,50 por camiseta.

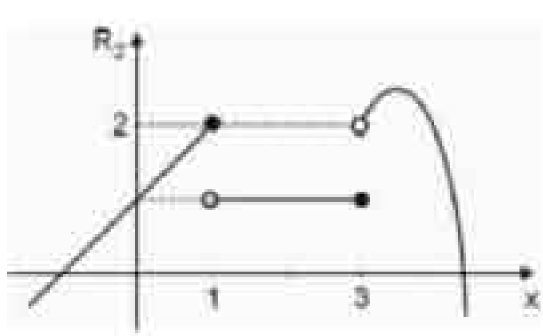
Quantas camisetas devem ser encomendadas com o fabricante para que o custo por camiseta seja de R$ 7,00?

a) 18
b) 36
c) 60
d) 180
e) 200

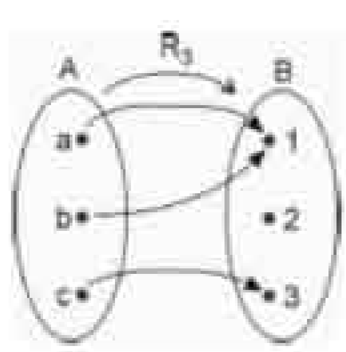
07) (UTFPR) – Assinale a alternativa que contem uma relação que NÃO é função.

a) $R_1 = \{(-2, 1), (-1, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 3)\}$

b)



c)



d) $R_4 = \{(x, y) \in N \times R / y^2 = x\}$

e) $R_5 = \{(x, y) \in N \times R+ / y = \sqrt{x}\}$

08) (UTFPR) – Newton quer imprimir folhetos com a propaganda da sua empresa.
N a gráfica A, o custo para montagem deste folheto é de R$ 120,00 e o valor da impressão por unidade é R$ 0,20. A gráfica B cobra R$ 80,00 para a montagem e R$ 0,25 para a impressão de cada unidade. Após analise cuidadosa, Newton conclui que:

a) é vantagem fazer encomenda na gráfica B para qualquer quantidade de folhetos.
b) a gráfica A oferece um custo menor que a B para um numero de folhetos menos que 800.
c) se encomendar 1000 folhetos da gráfica B, irá gastar R$ 320,00
d) se desejar 1000 folhetos gastará menos se encomendar da empresa A.
e) para a quantidade de 800 folhetos, o custo de qualquer das empresas é igual a R$ 290,00.

09) (UFPR) – A função f: $R \to R$ é tal que para todo $x \in R$, $f(2x) = 3f(x)$. Sabendo que $f(8) = 45$, calcule $f(2)$.

10) (UEL –PR) – Seja f(n) uma função definida para todo n inteiro tal que:

$$\begin{cases} f(2) = 2 \\ f(p+q) = f(p).f(q) \end{cases}$$

onde p e q são inteiros. O valor de f(0) é:

a) -1
b) 0
c) 1
d) $\sqrt{2}$
e) 2

11) Sejam F = [1,2,3,4] e G = [3,4,7].
Então:

a) F X G tem 12 elementos
b) G X F tem 9 elementos
c) $F \cup G$ tem 7 elementos
d) $F \cap G$ tem 3 elementos
e) $(F \cup G) \cap F\ \varnothing$

12) O domínio da relação P = {(x,y) ∈ N X N/ y = x – 5} é:

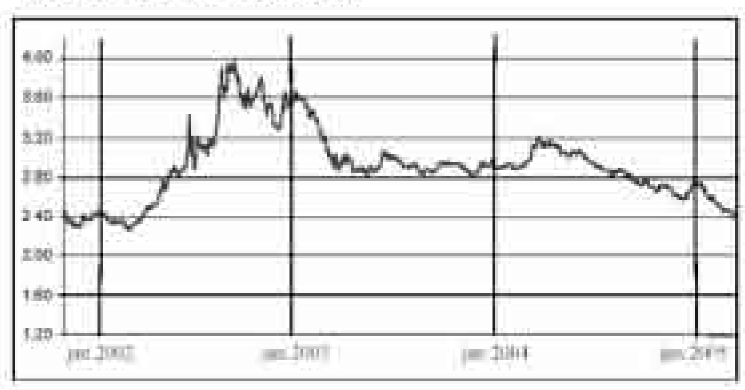
a) IN
b) IN^*
c) IR
d) { x ∈ N/ x ≥ 5}
e) { x ∈ N/ x ≤ 6}

13) Sejam os conjuntos A = {1,2} e B = {0,1,2}. Qual das afirmativas a seguir é verdadeira?

a) f: $x \to 2x$ é uma função de A em B
b) f: $x \to x + 1$ é uma função de A em B
c) f: $x \to x^2 - 3x + 2$ é uma função de A em B
d) f: $x \to x^2 - x$ é uma função de B em A
e) f: $x \to x - 1$ é uma função de B em A

14) (ENEM) – No gráfico abaixo, mostra-se como variou o valor do dólar, em relação ao real, entre o final de 2001 e o início de 2005.

Por exemplo, em janeiro de 2002, um dólar valia cerca de R$2,40.

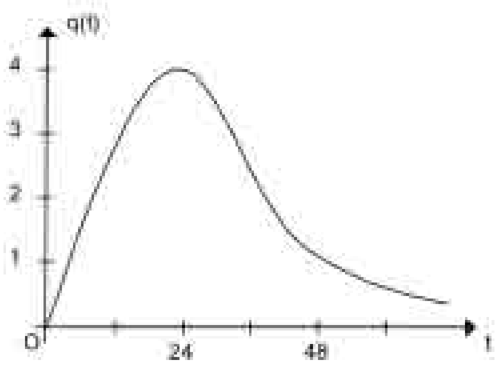


(Fonte: Banco Central do Brasil.)

Durante esse período, a época em que o real esteve mais desvalorizado em relação ao dólar foi no:

a) final de 2001.
b) final de 2002.
c) inicio de 2003.
d) final de 2004.
e) inicio de 2005.

15) (UFPR) – Um estado feito com certo tipo de bactéria detectou que, no decorrer de uma infecção, a quantidade dessas bactérias no corpo de um paciente varia aproximadamente segundo uma função q(t) que fornece o número de bactérias em milhares por mm^3 de sangue no instante t. O gráfico da função q(t) encontra-se esboçado abaixo. O tempo é medido em horas, e o instante t = 0 corresponde ao momento do contagio.



Com base nessas informações, considere as seguintes afirmativas:

I. A função q(t) é crescente no intervalo [0,48].

II. A quantidade máxima de bactérias é atingida 24 horas após o contagio, aproximadamente.

III. 60 horas após o contagio, a quantidade de bactérias esta abaixo de 1500 por mm^3.

Assinale a alternativa correta:

a) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
d) Somente a afirmativa I é verdadeira.
e) Somente a afirmativa III é verdadeira.

AULA Nº 03

FUNÇÃO AFIM

Função Afim

02. $f(x) = -5x + 5$ onde $a = -5$; $b = 5$.

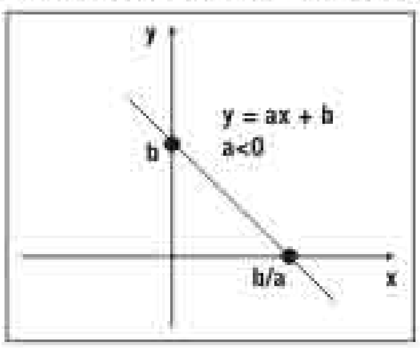
Uma função é dita do 1º grau, quando é do tipo $\boxed{f(x) = ax + b}$, onde $a \neq 0$.

Exemplos:

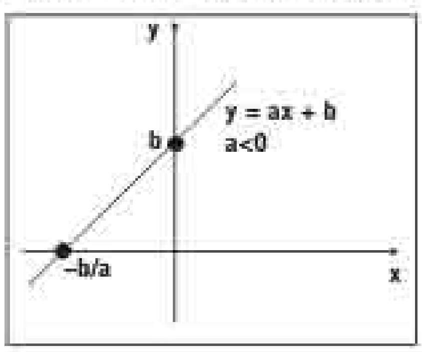
01. $f(x) = 2x + 8$ onde $a = 2$; $b = 8$.

Características da Função Afim

I) O gráfico de uma função afim é sempre uma reta decrescente quando $a < 0$.



II) O gráfico de uma função afim é sempre uma reta crescente quando $a > 0$.



III) Na função $f(x) = ax + b$,

Se $b = 0$, f é dita **<u>função linear</u>**.

Se $b \neq 0$, f é dita **<u>função afim</u>**.

IV) O gráfico intercepta o eixo dos x na raiz da equação $f(x) = 0$ e, portanto, no ponto de abscissa $x = -b/a$.

V) O gráfico intercepta o eixo dos y no ponto $(0 , b)$, que é o termo independente b, onde <u>b</u> é chamado coeficiente linear .

VI) O valor <u>a</u> é chamado coeficiente angular e dá a inclinação da reta.

VII) Quando a função é linear, ou seja, $y = f(x) = ax$, o gráfico é uma reta que sempre passa na origem, no ponto $(0, 0)$.

Função Constante

Uma função é dita constante quando é do tipo $\mathbf{f(x) = k}$, onde k é um número real que não depende de x .

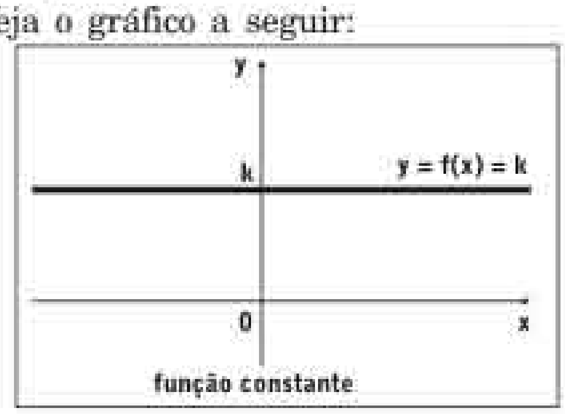
Exemplos:

a) $f(x) = 9$

b) $f(x) = -2$

Nota: o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x .

Veja o gráfico a seguir:



Exercícios

01. A representação da função $y = -3$ é uma reta:

a) paralela aos eixo das ordenadas

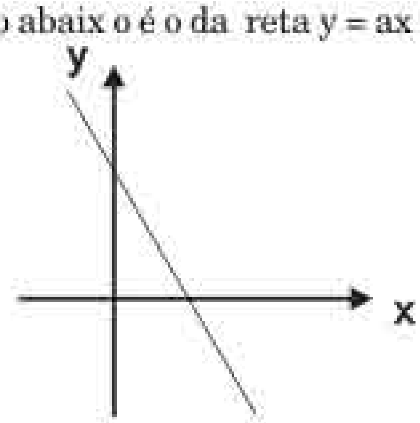
b) perpendicular ao eixo das ordenadas

c) perpendicular ao eixo das abscissas

d) que intercepta os dois eixos

e) nda

02. O gráfico abaixo é o da reta $y = ax + b$, quando:



a) $a < 2$

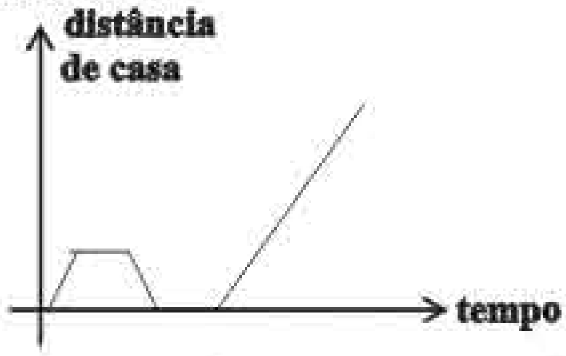
b) $a < 0$

c) $a = 0$

d) $a > 0$

e) $a = 2$

03.(UFPR) Qual das histórias melhor se adapta ao gráfico abaixo?



a) Saí de casa calmamente, mas quando vi que poderia me atrasar, comecei a caminhar mais rápido.

b) Eu tinha acabado de sair de casa quando tive a sensação de ter esquecido as chaves do escritório. Parei para procurá-las na minha mala, mas não as encontrei. Voltei para buscá-las e depois pude seguir para o escritório.

c) Tinha acabado de sair de casa quando o pneu furou. Como meu carro estava sem estepe, precisei ficar horas esperando pelo borracheiro. Ele veio, consertou o pneu, e eu pude seguir viagem.

d) Logo que saí de casa encontrei um amigo que não via há muito tempo. Parei para conversar um pouco e depois segui para o escritório.

e) Saí de casa sem destino, dei uma volta na quadra e resolvi voltar para casa. O tempo estava para chuva e resolvi não sair mais de casa.

04. (EXPCEX) Sendo f uma função real tal que $f(x-2) = ax + b$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(2) = 5$ e $f(3) = 8$, então o valor de **a.b** é

a) - 32

b) - 23

c) - 21

d) 12

e) 36

05.(ACAFE-SC) Suponha que uma companhia de água cobre o consumo residencial pela seguinte tabela:

Faixa de consumo por m^3	Valor em reais por m^3
0 - 10	**1,20**
11 - 25	**2,00**
mais de 25	**2,50**

O proprietário de uma residência, que num determinado mês consumiu $27m^3$ de água, pagará, em reais:

a) 55,00

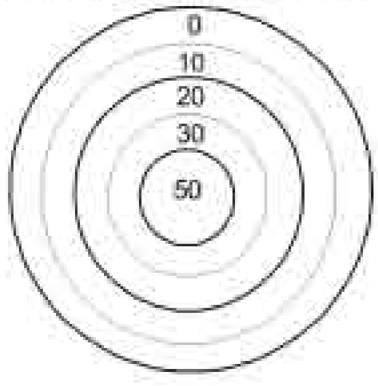
b) 67,50

c) 54,00

d) 45,00

e) 47,00

06. (ACAFE-SC) Dois atiradores, **AeB** , numa série de 20 tiros num alvo com a forma indicada na figura abaixo, obtiveram os resultados que estão anotados no quadro dado.



atiradores	50	30	20	10	0
A	5	4	3	7	1
B	6	2	3	8	1

Observando a média de pontos dos atiradores **A** e**B** , a alternativa **correta** é:

a) O atirador **B** superou o atirador **A** em 2 pontos.

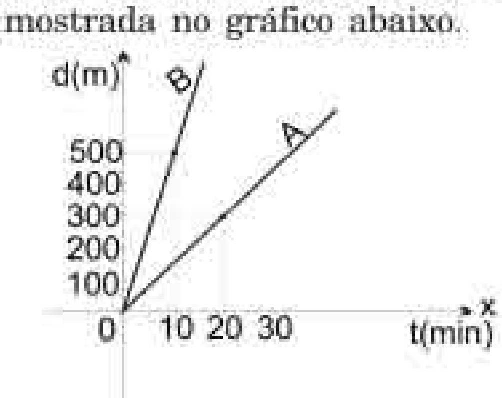
b) O atirador **A** teve melhor desempenho que o atirador **B**.

c) Os atiradores tiveram o mesmo desempenho.

d) A média de pontos do atirador **B** é de 20 pontos.

e) A média de pontos do atirador **A** é de 24 pontos.

07. Dois atletas **AeB** fazem teste de Cooper numa pista retilínea, ambos correndo com velocidade constante. A distância (d) que cada um percorre é mostrada no gráfico abaixo.



Com base no gráfico, a alternativa **correta** é:

a) **A** é mais veloz que **B**, pois percorre 600m em 20 min.

b) **B** percorre 1km em 20 min.

c) **B** é mais veloz que **A**, pois percorre 400m em 5 min.

d) **A** e**B** correm na mesma velocidade.

e) **A** percorre 400m em 30 min.

08. O gráfico da função $f(x) = m\,x + n$ passa pelos pontos (4, 2) e (-1, 6). Assim o valor de m + n é :

a) 13/5

b) 22/5

c) 7/5

d) 13/5

e) 2,4

09. (UTFPR) – Uma maquina foi adquirida pela Empresa Bons Negócios por R$ 16.000,00. Após 12 anos, esta maquina estará totalmente depreciada, isto é, seu valor será zero. Supondo que a depreciação ocorra de forma linear no tempo, a empresa poderá vender esta maquina, após 4,5 anos, em R$, por:

a) 8.000.

b) 6.000.

c) 10.000.

d) 9.600.

e) 7.200.

10. (UEPG –PR) – Em relação à função f: IR → IR, definida por: $f(x) = (k^2 - 4)x - 5$, é correto afirmar que:

01) é crescente se $k < -2$ ou $k > 2$.

02) se k = 2, seu gráfico é uma reta paralela ao eixo y.

04) é constante para k = -2 ou k = 2.

08) se k = 0, seu gráfico passa pela origem.

16) é decrescente para -2   2.

11.(ENEM) – O gás natural veicular(GNV) pode substituir a gasolina ou álcool nos veículos automotores. Nas grandes cidades, essa possibilidade tem sido explorada, principalmente, pelos táxis, que recuperam em um tempo relativamente curto o investimento feito com a conversão por meio da economia proporcionada pelo uso do gás natural. Atualmente, a conversão para gás natural do motor de um automóvel que utiliza a gasolina custa R$ 3.000,00. Um litro de gasolina permite percorrer cerca de 10km e custa R$ 2,20, enquanto um metro cúbico de GNV permite percorrer cerce de 12km e custa R$ 1,10. Desse modo, um taxista que percorra 6.000km por mês recupera o investimento daqui:

a) 2 meses.

b) 4 meses.

c) 6 meses.

d) 8 meses.

e) 10 meses.

12. (UEL –PR) – O gerente de uma agencia de turismo promove passeios de bote para descer cachoeiras. Ele percebeu que quando o preço pedido para esse passeio era R$ 25,00, o número médio de passageiros por semana era de 500. Quando o preço era reduzido para R$ 20,00, o numero médio de fregueses por semana sofria um acréscimo de 100 passageiros. Considerando que essa demanda seja linear, se o preço for reduzido para R$ 18,00, o número médio de passageiros esperado por semana será:

a) 360

b) 540

c) 640

d) 700

e) 1360

13. (UFPR) – Em determinado país, o imposto de renda a ser pago por cada pessoa, é calculado da seguinte forma:

I) O rendimento bruto é decomposto em faixas de valores;

II) Ao valor compreendido em cada uma dessas faixas é aplicado um percentual;

III) Os valores que resultam da aplicação dos percentuais às diversas faixas de valores são somados;

IV) O resultado dessa soma corresponde ao imposto total a ser descontado.

As faixas de valores são:

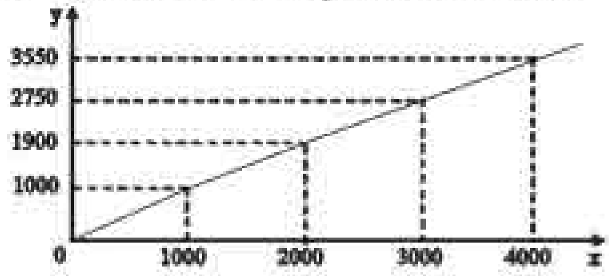
1ª) até R$ 1.000,00

2ª) acima de R$ 1.000,00 até R$ 2.000,00

3ª) acima de R$ 2.000,00 até R$ 3.000,00

4ª) acima de R$ 3.000,00

O gráfico abaixo representa a relação entre o rendimento bruto, **x**, e o rendimento líquido, **y**, após o desconto do imposto de renda.



Com base nessas informações, assinale o que for correto:

01) Não há desconto para rendimento brutos inferiores a R$ 1.000,00.

02) O percentual aplicado à segunda faixa é de 5%.

04) Para um rendimento bruto de R$ 1.050,00, o rendimento líquido após o desconto do imposto de renda é R$ 997,50.

08) Se 2.000 x £3.000, então y = 0,85(x – 2.000) + 1.900.

16) Para um rendimento bruto de R$ 3.500,00, o desconto do imposto de renda é igual a 10% desse rendimento.

14. (UFPR) – No mês de maio de 2001, os jornais do Brasil divulgaram o plano do governo federal para diminuir o consumo de energia elétrica nas regiões Sudeste, Nordeste e Centro – Oeste. Conforme um dos jornais, além de várias regras que estabeleciam multas, bônus e corte de luz, haviam sido criadas faixas de preços relativas ao consumo mensal: para os primeiros 200kWh consumidos, o preço de cada kWh é R$ 0,24; para os 300kWh seguintes consumidos, o preço de cada kWh é R$ 0,36; o preço de cada kWh consumido acima de 500kWh é R$ 0,72. Sendo p(x) o preço em reais referente ao consumo mensal de x kWh, calculado somente com base nessas informações sobre as faixas de preços, é correto afirmar:

I) p(300) = 96.

II) p(2x) é sempre o dobro de p(x).

III) Para x maior que 500, uma formula para calcular o preço é p(x) = 0,72(x – 500) + 156.

IV) Se 0, então uma formula para calcular o preço é p(x) = 0,24x.

V) Na faixa de 201a 500 kWh, o preço de 1kWh 50% maior que o de 1kWh na faixa de zero a 200kWh.

a) F,F,F,V,F.

b) F,V,V,F,V.

c) V,V,V,F,F.

d) F,F,V,V,V.

e) V,F,F,F,V.

AULA Nº 04

FUNÇÃO QUADRÁTICA

é toda função do tipo:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

(com a, b e c ∈ IR e a ≠ 0).

Onde:

- O gráfico é uma parábola.
- a, b, c são os coeficientes.
- x é a variável.

Observe:

- Se a > 0, a concavidade da parábola está voltada para cima.
- Se a < 0, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

Quando x = 0, temos y=c e este é o ponto onde o gráfico corta o eixo y (termo independente).

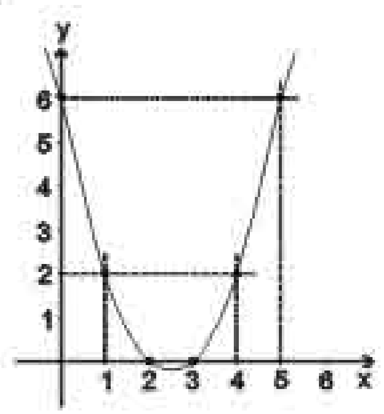
Se o termo independente for nulo, a parábola passa na origem.

Quando y = 0, temos $ax^2 + bx + c = 0$ e a solução desta equação nos dá os pontos em que o gráfico corta o eixo x (raízes da equação).

Exemplos:

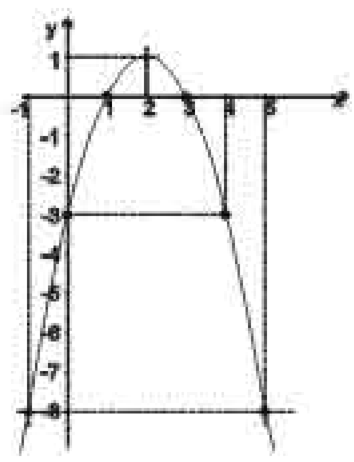
$y = x^2 - 5x + 6$

x	y
0	6
1	2
2	0
3	0
4	2
5	6



$y = -x^2 + 4x - 3$

x	y
-1	-8
0	-3
1	0
2	1
3	0
4	-3
5	-8



Convém lembrar que se igualarmos a função acima a **0** (zero), teremos uma equação do 2º grau.

Para a equação do 2º grau
$ax^2 + bx + c = 0$
Use a formula de Báskara
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{c}$

Vértice de uma Parábola

Toda a função do 2º Grau tem um ponto de máximo ou de mínimo.

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$

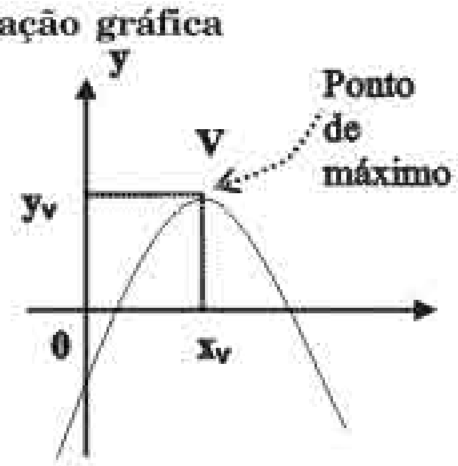
Ponto de máximo V (x_v , y_v)

O ponto de máximo é ponto de maior ordenada (y_v) da função:

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, onde (a < 0)

Obs.: O coeficiente **a** de x^2 é NEGATIVO.

Representação gráfica



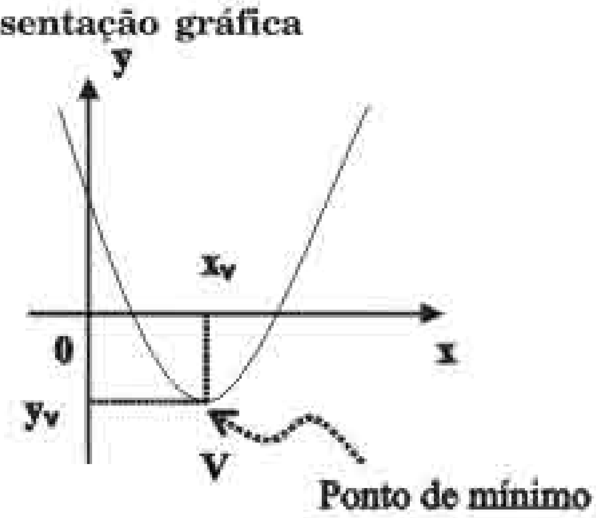
Ponto de mínimo V(x_v , y_v)

O ponto de mínimo é ponto de menor ordenada (y_v) da função:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, onde (a > 0)

Obs.: O coeficiente **a** de x^2 é POSITIVO.

Representação gráfica



Cálculo do Vértice da Função do 2º Grau

Abscissa x_v do vértice

$$x_v = \frac{-b}{2.a}$$

Ou também, calculando a média aritmética das raízes (x_1 e x_2):

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Ordenada y_v do vértice (máximo ou mínimo)

$$yv = \frac{-(b^2 - 4.a.c)}{4.a}$$

Ou também, **substituino** $\mathbf{x_v}$ na função:

Imagem da função do 2• grau

	Imagem
Se a > 0	$y \geq y_v$
Se a < 0	$y \leq y_v$

EXERCÍCIOS

01. (UFPR) – A parábola da equação $y = ax^2 + bx + c$ passa pelo ponto (1,0). Então a + b + c é igual a:

02. (UEM –PR) – Considere a função f: $IR \rightarrow IR$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 5$. É correto afirmar que:

a) as coordenadas do ponto de máximo são (3,-4).

b) o domínio da função é o conjunto IR – {1,5}.

c) a função é sobrejetora, mas não injetora.

d) a função é negativa para todos os pontos cuja abscissa está entre suas raízes.

e) a função é decrescente para todo $x \in IR$, com $x \geq 3$.

03. (UEPG –PR) – Em relação às funções quadráticas $p(x) = x^2 - 2x - 8$ e $q(x) = -x^2 + 5x - 4$, assinale o que for correto.

01) p(x) e q(x) têm uma raiz comum.

02) p(x) admite um ponto de máximo e q(x) admite um ponto de mínimo.

04) Estão no intervalo (-2,4) os valores reais de x, tal que p(x) = q(x).

08) q(x) 0 para {x IR/ 14}.

16) q(p(-1)) = -4.

04. (UTFPR) O maior valor que y pode de assumir na expressão $y = -x^2+2x$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

05. (UEL-PR) Se x e y são as coordenadas do vértice da parábola $y= 3x^2- 5x + 9$, então x + y é igual a:

a) 5/6

b) 31 /14

c) 83/12

d) 89/18

e) 93/12

06. (UEPG-PR) Seja a função $f(x) = 3x^2 + 4$ definida para todo x real. Seu conjunto imagem é:

a) $\{y \in IR/y \leq 4\}$

b) $\{y \in IR/-4<y<4\}$

c) $\{y \in IR/y > 4\}$

d) $\{y \in IR/y \geq 4\}$

e) Reais

07. Em uma partida de vôlei, um jogador deu um saque em que a bola atingiu uma altura h em metros, num tempo t, em segundos, de acordo com a relação $h(t) = - t^2 + 8t$.

a) Em que instante a bola atingiu a altura máxima?

[Nota]: observem o vértice

b) De quantos metros foi a altura máxima alcançada pela bola?

08. Para se produzir "x" unidades de um certo produto, uma empresa tem como expressar o seu custo por $C(x) = x^2 - 50x + 2500$. Analise as proposições a seguir:

I. A empresa deve produzir 25 unidades para que o custo seja mínimo.

II. O custo mínimo da empresa é de R$ 2500,00.

III. O custo de produção de 10 unidades é maior que o custo de produção de 30 unidades.

Assinale a alternativa correta:

a) Apenas I está correta.

b) Apenas I e II estão corretas.

c) Apenas I e III estão corretas.

d) Apenas II e III estão corretas.

e) Todas estão corretas.

09. (UFPR) Um grupo de funcionários vai viajar para participar de um congresso. Eles tiveram a idéia de fretar um ônibus no qual todos viajariam juntos e cada um pagaria o preço do fretamento dividido pelo número de pessoas. Ao pesquisar os preços, descobriram que uma empresa de turismo só aceitava grupos de 15 a 40 passageiros para cada ônibus, e calculava o preço (em reais) do fretamento do ônibus pela fórmula $p(x) = - x^2 + 70x + 50$, onde x representa o número de passageiros. Considere as seguintes afirmações a respeito dos preços nessa empresa.

I. Se viajarem 40 pessoas, cada pessoa pagará mais de R$ 30,00.

II. Se viajarem 30 pessoas, o preço do fretamento será menor do que o preço correspondente a 40 pessoas.

III. Existe um número x de pessoas para o qual o preço do fretamento é igual a R$ 1.150,00.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente a afirmativa I é verdadeira.

b) Somente a afirmativa II é verdadeira.

c) Somente a afirmativa III é verdadeira.

d) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

e) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

10. (UFPR) Se a soma de dois números é 14/3 e o produto é 5/3, então um dos números é:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

11. (UEM –PR) – Um artesão produz lembranças que vende a turistas por x reais cada uma. Com esse preço, ele sabe, por experiência, que seu lucro mensal é obtido da expressão $L(x) = 400(15 - x)(x - 3)$. Determine, em reais, o preço pelo qual ele deverá vender cada lembrança para obter o maior lucro mensal possível.

12. (UEL –PR) – Um grupo de amigos alugou um ônibus com 40 lugares para uma excursão. Foi combinado com o dono do ônibus que cada participante pagaria R$ 60,00 pelo seu lugar e mais uma taxa de R$ 3,00 para cada lugar não ocupado. O dono do ônibus receberá, no máximo:

a) R$ 2.400,00

b) R$ 2.520,00

c) R$ 2.620,00

d) R$ 2.700,00

e) R$ 2.825,00

13. (UFPR) – Um grupo de estudantes decidiu viajar de ônibus para participara de um encontro nacional. Ao fazerem uma pesquisa de preços, os estudantes receberam de uma empresa a seguinte proposta, na qual o preço de cada passagem depende do total de passageiros: cada passageiro pagará R$ 90,00 mais o valor de R$ 5,00 por lugar que eventualmente ficar vago no ônibus. Sabendo que o ônibus tem 52 lugares, é correto afirmar:

01) Se viajarem 30 passageiros, cada um deles pagará R$ 110,00.

02) Se o total de passageiros for x, o preço (em reais) de cada passagem será calculado pela expressão $90 + 5 \cdot (52 - x)$.

04) Se viajarem 40 pessoas, a empresa deverá receber um total de R$ 6.000,00 referente ao pagamento das passagens.

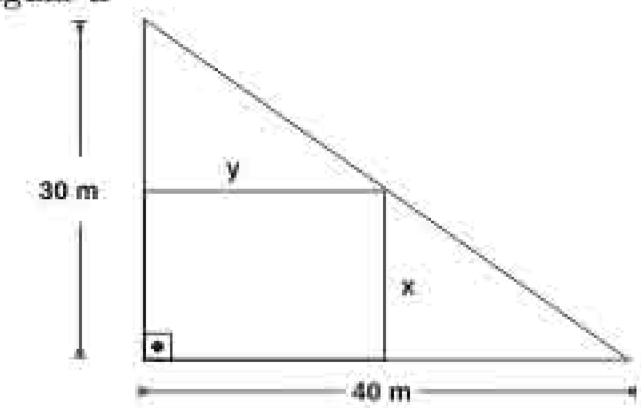
08) Se viajarem x pessoas, o valor total (em reais) que a empresa deverá receber referente ao pagamento das passagens, é calculado pela expressão $300x - 5x^2$.

16) O valor máximo que a empresa poderá receber referente ao pagamento das passagens ocorrerá quando o total de passageiros for igual a 35.

14. (UFPR) – A função **f** definida por $f(x) = 9x - \frac{3}{4}x^2$ para todo valor de x:

a) Não tem máximo nem mínimo.
b) Tem um ponto mínimo quando $x = 6$.
c) Tem um ponto máximo quando $x = 12$.
d) Tem um ponto máximo quando $x = 6$.
e) Admite um ponto de mínimo para $x = 12$.

15. Em um terreno, que tem a forma de um triângulo retângulo com catetos medindo 30 m e 40 m, deseja-se construir uma casa retangular de dimensões *x* e *y*, como indicado na figura que segue. Nessas condições, para que a área ocupada pela casa seja a maior possível, o valor de seu semiperímetro, em metros, deverá ser igual a



a) 30 b) 35 c) 40 d) 45 e) 50

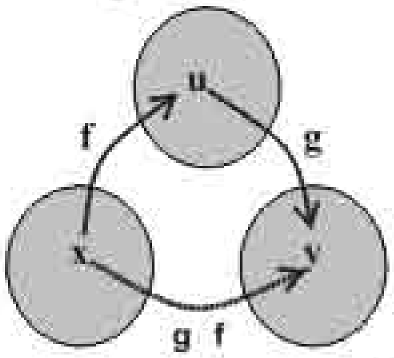
AULA Nº 05

FUNÇÃO COMPOSTA

Sejam **f: A → B e g: B → C** duas funções.

Chama-se Função Composta de f com g a função **g ° f : A → C,** tal que:

(g ° f) (x) = g(f(x))



A função composta de **g** em **f** é **h** e é indicada por **g∘f** (lê-se: **g** bola **f** ou **g** círculo **f** ou **g** após **f**) ou se indica por **g[f(x)]** (que se lê: **g** de **f** de **x**).

Exemplo:

Dados $f(x) = x^2 + 3x$ e $g(x) = x - 3$

Encontre:

I. **f[g(x)]**

$f[g(x)] = x^2 + 3x$

$f[g(x)] = (x - 3)^2 + 3(x - 3) = \quad x^2 - 3x$

II. **g[f(x)]**

$g[f(x)] = x - 3$

$g[f(x)] = (x^2 + 3x) - 3$

$g[f(x)] = x^2 + 3x - 3$

EXERCÍCIOS

01. (UEPG –PR) – Seja f(x) uma função definida em IR por $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Então f[f(x)] vale:

a) $\dfrac{x-2}{x-1}$

b) $\dfrac{x-1}{x}$

c) –1

e) – x

02. (UTFPR) – Se $f(x) = 3x - \dfrac{2}{x}$, então f[f(2)] vale:

a) 75

b) 2/5

c) 3/5

d) 73/5

e) 19/6

03. (UEPG –PR) – Sobre as funções f: IR → IR e g: IR → IR definidas por $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = f(2x) - f(x + 1)$, assinale o que for correto:

01) O gráfico de g é uma reta que passa pela origem.

02) Os gráficos de f e de g são retas paralelas.

04) $f(x) = g(x)$, $x \in$ IR.

08) $f(g(x)) = g(f(x)) + 1$, x IR.

16) Existe um único valor x IR, tal que $f(x) = g(x)$.

04. (UEL –PR) – A função f de IR é definida por $f(x) = mx + p$.

Se $f(2) = -5$ e $f(-3) = -10$, então $f(f(18))$ é igual a:

a) –2

b) –1

c) 1

d) 4

e) 5

05. (UFPR) – Dadas as funções f: IR → IR e g: IR → IR definidas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = x^2$, considere as seguintes afirmativas:

I. $(g \circ f)(1) = (a + b)^2$.

II. $(f \circ g)(-x) = (f \circ g)(x)$, para qualquer x IR.

III. $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$, para qualquer x IR.

Assinale a alternativa correta:

a) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

b) Somente a afirmativa I é verdadeira.

c) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

d) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

06.(UTFPR) – Considere f: IR → IR e g: IR → IR funções definidas por:

$f(x) = 3x^2 - 2a$ e $g(x) = x + a$, a IR_+.

Se $f(g(1)) = 10$, então $g(f(1))$ será igual a:

a) 0

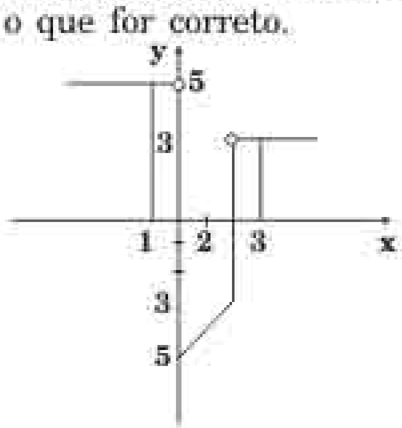
b) 1

c) 2

d) –2

e) –1

07.(UEPG –PR) – Sobre o gráfico abaixo, que representa uma função y = f(x) definida em IR, assinale o que for correto.



01) A função é continua, $\forall\ x \in IR$

02) A função é crescente para $x > 2$

04) O domínio da função é dado por $D(f) = IR - \{2\}$

08) $f(2) = -3$

16) $f(f(-5)) = 3$

08. (AFA) Se f e g são funções de IR em IR definidas por $f(3x+2) = \frac{3x - 2}{5}$ e $g(x-3) = 5x - 2$, então

$f(g(x))$ é

a) $\frac{x - 4}{5}$

b) $\frac{5x \quad 9}{5}$

c) $5x + 13$

d) $\frac{5x \quad 1}{5}$

09. Considerando-se as funções f e g de IR em IR, sendo $g(x) = 4x - 5$ e $f(g(x)) = 13 - 8x$, então

a) $f(x) = 2 - 3x$

b) $f(x) = 3 - 2x$

c) $f(x) = 2 + 3x$

d) $f(x) = 2x + 3$

10. (EXPCEX) Na função $f(x) = 3x - 2$, sabemos que $f(a) = b - 2$ e $f(b) = 2b + a$.

O valor de $f(f(a))$ é:

a) 2

b) 1

c) 0

d) –1

e) –2

11. Se $f(x) = a + 1$ e $g(z) = 2z + 1$, então $g(f(x))$ vale:

a) $2a + 3$

b) $2a + 2$

c) $a + 4$

d) $a + 3$

12. (UTFPR) Considere f: IR → IR e g: IR → IR funções definidas por:

$f(x) = 3x^2 - 2a$ e $g(x) = x + a$, a $\quad IR_+$.

Se f (g (1)) = 10, então g (f (1)) será igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
d) –2
e) –1

13. Dadas as funções reais $f(x) = 1 - 2x$ e $g(x) = 2x + k$, o valor de **k**, de modo que $f[g(x)] = g[f(x)]$, é:

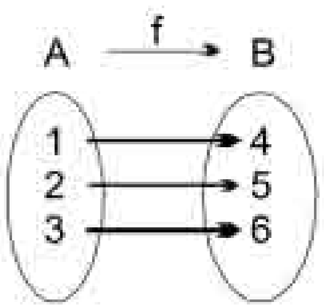
a) –3
b) –1/3
c) –1
d) 1/3
e) 1

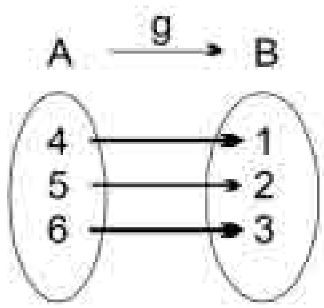
14. (UFPR) – Para cada valor real de **x**, sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = f[f(x)]$. Calcule o valor de $\frac{f[g(3)]}{g(3)}$.

AULA Nº 06

FUNÇÃO INVERSA

Sejam as funções bijetoras, $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$ representadas pelos diagramas





Note que:

$f(1) = 4$ $\quad g(4) = 1$
$f(2) = 5$ $\quad g(5) = 2$
$f(3) = 6$ $\quad g(6) = 3$

Definição: Uma função $f: A \rightarrow B$, bijetora, terá uma função inversa $g: B \rightarrow A$, também bijetora, se e somente se: $f(a) = b$, então $g(b) = a$.

Notação:
Se $g(x)$ é inversa de $f(x)$, então

Método prático para obter a função inversa

1) Trocar x por y e vice-versa.
2) Isolar y na nova sentença.
3) Substitua y pela notação $f^{-1}(x)$.

O resultado obtido é a função inversa.

Exemplo:

$$y = \frac{4x-2}{3}$$

$$x = \frac{4y-2}{3}$$

$$y = \frac{3x+2}{4}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{4}$$

EXERCÍCIOS

01.(UFPR) – Dada a função "g" definida por $g(x) = x + 4$ para todo valor real de **x**, então, a função g^{-1}, inversa de "g", é definida por:

a) $g^{-1}(x) = x^{-1} - 4$
b) $g^{-1}(x) = x^{-1} + 4$
c) $g^{-1}(x) = \frac{1}{x\ 4}$
d) $g^{-1}(x) = x - 4$
e) $g^{-1}(x) = [g(x)]^{-1}$

02.(UTFPR) – Se $f(x) = x^3 - 1$, então $f^{-1}(x)$ inversa de **f**, se exprime por:

a) $y = x^3 - 1$
b) $y = x^3 + 1$
c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x\ 1}$
d) $y = \sqrt[3]{x\ 1}$
e) $y = 2x$

03.(UTFPR) – Calcule $f^{-1}(2)$, sendo $f(x) = 3 - \frac{2x}{x+2}$

a) 1
b) 0
c) $\frac{1}{2}$
d) 3
e) 2

04.(UEL –PR) – A função inversa da função $y = \frac{x}{2} + 3$ é:

a) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$
b) $y = -\frac{x}{2} - 3$
c) $y = 2x - 6$
d) $y = \frac{2}{x}$
e) $y = 2x^2$

05. Considerando-se a função f:IR → IR, x → y = 2x + 1. Determine a lei que define a função f^{-1}.

06. (UFPR) – No interior de uma caverna existe uma estalagmite cuja altura aumenta de modo constante à razão de 1 cm a cada 10 anos. Nessas condições, a função **h** definida por $h(t) = \dfrac{t}{(10)}$ com $t \geq 0$, relaciona a altura da estalagmite (em centímetros) com o tempo **t** (em anos) decorrido desde o inicio da sua formação. Assim é correto afirmar:

01) A função inversa da função h é definida por $h^{-1}(t) = \dfrac{10}{t}$.

02) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o gráfico da função h é uma parábola.

04) h(80) = 80

08) São necessários 200 anos para que haja um aumento de 20 cm na altura da estalagmite.

16) A altura da estalagmite é diretamente proporcional ao tempo t.

07. (UTFPR) – O gráfico de uma função do primeiro grau passa por (1, –2) e tem coeficiente angular igual a –1. Nestes termos, podemos afirmar que:

a) esta função é crescente.

b) esta função é par.

c) esta função intercepta o eixo "x" em (0, –2).

d) sua inversa é dada por y = – x – 1.

e) sua equação é dada por y = x + 1.

08. (UEM –PR) – Com respeito à função f: IR → IR definida por f(x) = 4x + 2, assinale o que for correto:

a) A função inversa de f é f^{-1}: IR → IR definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{4x+2}$

b) A função composta f f(x) é definida por (4x + 2).

c) Para todo x pertencente ao domínio de f, tem-se que f(x) é um número par.

d) Se um ponto (a, b) pertence ao gráfico de f, então a ≠ b.

e) f não é uma função decrescente.

09. Dada a função f(x)= 3x–1, calculando $f^{-1}(5)$, obtemos:

a) 2

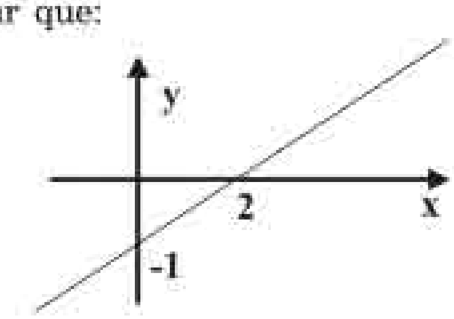
b) 3

c) 6

d) 5

e) –3

10. Sobre o gráfico da função f: IR•IR, do 1º grau, representada pelo gráfico a seguir, é correto afirmar que:



a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$

b) $f^{-1}(x) = 2x - 2$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x-2}$

d) $f^{-1}(x) = 2x + 2$

e) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 1$

11. (UFPR) Considere as seguintes afirmativas a respeito da função f: D → R definida por f $(x) = \dfrac{x}{1-x}$:

I. O ponto não pertence ao conjunto D.

II. $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x-1}$

III. $f(x) \neq -1$, qualquer que seja $x \in R$.

IV. A função inversa de f é $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e IV são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas I, III e IV são verdadeiras.
e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

12. Sejam as funções f e g, de IR em IR, definidas por $f(x) = 2x-1$ e $g(x) = ax + b$. A função g será a inversa de f se, e somente se

a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{4}$
b) $a + b = 0$
c) $a - b = 1$
d) $a = b = \dfrac{1}{2}$

13. Sejam as funções $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ definida para todo **x** real, e $x \neq 2$ e $g(x) = 3x + 2$ definida para todo **x** real, então:

a) O domínio da função $f(g(x))$ é $D = R - \{-2\}$.
b) O valor de $g(f(3)) = 9/2$.
c) A função inversa de g(x) é definida por $g-1(x) = \dfrac{x-2}{3}$.
d) A reta que representa a função g(x) intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 2 / 3).

14. (UTFPR) – Se $f(x) = x^3 - 1$, então $f^{-1}(x)$, inversa de **f**, se exprime por:

a) $y = x^3 - 1$
b) $y = x^3 + 1$
c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$
d) $y = \pm\sqrt[3]{x+1}$
e) N.d.a.

AULA Nº 07

MÓDULO

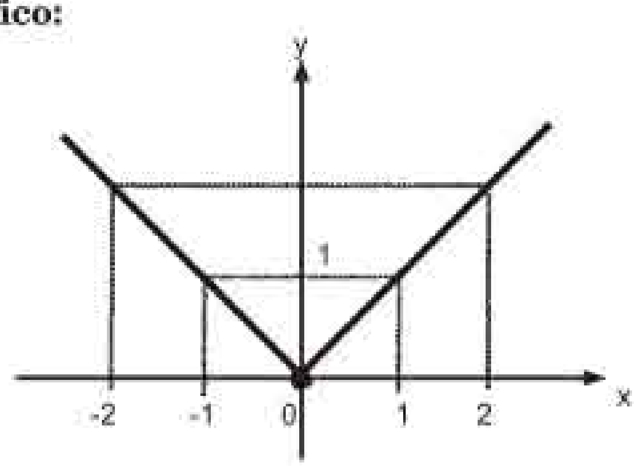
Devemos lembrar que módulo ou valor absoluto de um número real x, indica-se por $|x|$, e é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x \rightarrow x \geq 0 \\ -x \rightarrow x < 0 \end{cases}$$

É uma função definida por duas sentenças, aparecendo sob a forma de:

$$\boxed{f(x) = |x|}$$

Gráfico:



Exemplos:

a) $|5| = 5$ (pois $5 > 0$)

b) $|-3| = -(-3) = 3$ (pois $-3 < 0$)

Observação

O módulo de um número real **nunca** será negativo.

Equação Modular

É toda equação que possui módulo em um dos seus membros.

Exemplos:

a) $|x| = 5$

b) $|x - 3| = x + 9$

c) $|x|^2 + 3|x| - 2 = 0$

Exemplos:

I. $|5x - 10| = 15 \rightarrow \begin{cases} 5x - 10 = 15 \therefore x = 5 \\ \text{ou} \\ 5x - 10 = -15 \therefore x = -1 \end{cases}$

$S = \{1; 5\}$

II. $|3x - 5| = -2$ Impossível, pois $-2 < 0$

Inequação Modular

É toda inequação que possui módulo em um dos membros.

Exemplos:

a) $|x| \leq 6$

b) $|x + 3| > 5$

c) $|x^2 - 6x + 6| < 7$

Solução de uma Inequação modular

$|x| = a \rightarrow$ solução: $x \leq -a$ ou $x \geq a$

$|x| = a \rightarrow$ solução: $-a \leq x \leq a$

Exemplos:

I. $|x| > 3$ $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = +5 \end{cases}$

$S = \{x \varepsilon R / x - 3 \text{ ou } x > 3\}$

EXERCÍCIOS

01. (UEL –PR) – Seja **p** o produto das soluções reais da equação $||x+1|-2|=2$. Então **p** vale:

02. (UFPR) – Considere a função f: x → IR definida por $f(x) = |x|$, sendo x = IR – {0}. É correto afirmar que:

I. f(0) não está definida.

II. Se **g** é a função definida por g: IR → IR, $g(x) = x - 2$, então a expressão da função composta g o f é $(g \circ f)(x) = |x| - 2$.

a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas II é verdadeira.
c) I e II são verdadeiras.
d) I e II são falsas.
e) Não é possível chegar a uma conclusão.

03. (UEL –PR) – Os números inteiros que satisfazem a desigualdade $|2x + 3| < 5$ pertencem ao conjunto:

a) n

b) $\{x \in z / x < 0\}$

c) $\{x \in n / x \geq 1\}$

d) $\{x \in z / -4x < 1\}$

e) $\{x \in n / x \leq 1\}$

04. (FEPAR-PR) O conjunto imagem da função $f(x) = |x-1| - |x+2|$ é:

a) $[-3, 3]$

b) $[-3, +\infty]$

c) $]-\infty, 3]$

d) R_+

e) R

05. (UNIOESTE –PR) – Considerando o conjunto os números reais, podemos afirmar:

01) O conjunto solução da equação $|x-1| = |x|$ possui dois elementos.

02) $\left(\sqrt{2}\right)^{11} = 32\sqrt{2}$.

04) O número 4,3333....é gerado pela divisão de uma número a por um número b em que $a = 4b + 1$.

08) Se $a > b$ então $a^2 > b^2$.

16) O número $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$ é igual ao número $2\sqrt{2} - 2$.

06. Considere a função f: R → R dada por $f(x) = |2x+5|$.

Determine a soma dos números associados às proposições corretas.

01. **f** é injetora.

02. O gráfico de **f** intercepta o eixo **y** no ponto de coordenadas (0 , 5).

04. O valor mínimo assumido por **f** é zero.

08. o gráfico de **f** é uma reta.

16. **f** é uma função par.

07. (UEPG – PR) – Assinale o que for correto.

01) As desigualdades $-2 < 25x^2 - 3 < 97$ e $5^{-1} < |x| > 2$ são equivalentes.

02) $|x + y| \geq |x| + |y|$. $\forall$ x . y $\in$ IR.

04) O produto das raízes da equação $-|x-5| = 3$ é 8.

08) A função $f(x) = |x+1|$ é sempre crescente.

16) O domínio da função $f(x) = \frac{1}{1-|2x|}$ é $D = IR - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

08. (UEL –PR) – Seja **f** a solução de IR em IR dada por $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } \geq 1 \\ -x+1 & \text{se} < 1 \end{cases}$. É correto afirmar que:

a) $f(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
b) $f(x) \neq 0$ para todo x real.
c) O gráfico de f é uma reta.
d) $f(x) = |x-1|$.
e) f é injetora.

09. (UFPR) – Considerando as funções f: IR → IR e g: IR → IR definidas respectivamente por $f(x) = 1 - x$ e $g(x) = x^2$, é correto afirmar:

I) A função inversa de f é a própria função f.
II) $g(f(x)) = (x - 1)^2$, para todo x.
III) Se $|x| < 2$, então $-1 < f(x) < 3$.
IV) O maior valor da função composta fog é 1.
V) $\{x \in IR \mid g(x) - f(x) < 0\} \subset \{x \in IR \mid x < 0\}$.
VI) A função g é injetora.

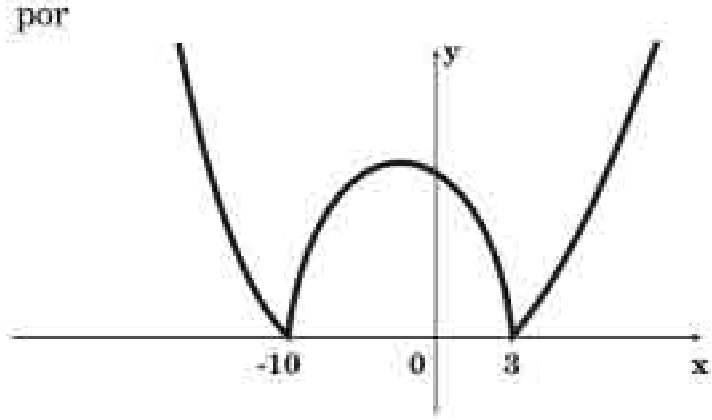
Estão corretas:

a) III, IV e V apenas.
b) I, II, III e IV apenas.
c) II e III apenas.
d) III, IV, V e VI apenas.
e) II, III e VI apenas.

10. (UEL –PR) – Se $A = \{x \in IR/\ x^2 \geq 4\}$ e $B = \{x \in IR/\ |x| < 3\}$, então $A \cap B$ é:

a) $\{x \in IR/\ 2 \leq x \leq 3\}$
b) $\{x \in IR/\ -2 < x < 3\}$
c) $\{x \in IR/\ -2 \leq x < 3 \text{ ou } -3 < x < 3\}$
d) $\{x \in IR/ - 3 < x \leq - 2 \text{ ou } 2 \leq x < 3\}$
e) $\{x \in IR/ - 3 < x < -2 \text{ ou } 2 \leq x < 3\}$

11. (UEM –PR) – Dada a função real $f(x) = |(x+a)^2 - b|$, com a, b ∈ IR, um esboço do seu gráfico é dado por



Dessa forma, a soma a + b é igual a.........

12. (UFPR) – Considere os conjuntos seguintes, onde IR indica o conjunto dos números reais e Z o dos números inteiros: $A = \{x \in IR/\ x - 1 \geq 0\}$, $B = \{x \in Z/\ |x| < 3\}$ e $C = \{1,2,3,4,5\}$.

I. $A = [-1, +\infty)$
II. $3 \in B$
III. $A \cap B = \emptyset$
IV. $A \cup C = A$
V. O produto cartesiano B x C tem 30 elementos.

Está(ão) correta(s):

a) II apenas.
b) I e II apenas.
c) II e III apenas.
d) IV apenas.
e) III e V apenas.

13. (UEL –PR) – Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = |x-3|$ e $g(x) = |x+3|$.
O valor de $f(g(-5))$ é:

14. (UNIOESTE –PR) – Considerando os conjuntos $A = \{x \in IR;\ |x+1| \leq 1\}$ e $B = \{x \in IR;\ |x-2| \leq 2\}$ é correto afirmar que:

01) o conjunto A é vazio.
02) $a \geq b$, para todos $a \in A$ e $b \in B$.
04) $A \cap B = \{0\}$.
08) $[-1, 1] \subset (A \cup B) - (A \cap B)$.
16) existem elementos x em A, tais que $x^2 \in B$.
32) $A \cap B$ é um conjunto unitário.

AULA Nº 08

EXPONENCIAIS

Funções exponenciais desempenham papéis fundamentais na Matemática e nas ciências envolvidas com ela, como: Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outras. Vamos apresentar alguns exemplos com aplicações destas funções.

Desintegração radioativa:

Alguns átomos são naturalmente instáveis, de tal modo que após algum tempo, sem qualquer influência externa sofrem transições para um átomo de um novo elemento químico e durante esta transição eles emitem radiações. Rutherford formulou o modelo $\mathbf{N(t) = N_o\, e^{-k.t}}$ para descrever o modo no qual a radioatividade decai.

Crescimento Populacional:

Thomas Malthus formulou um modelo exponencial para descrever a população de um ambiente em função do tempo. Partiu do princípio que os nascimentos e mortes eram proporcionais à população presente e a variação do tempo conhecida, chegando a função: $\mathbf{N(t)=N_o.e^{r.t}}$

Lei do resfriamento dos corpos:

Partindo de estudos matemáticos pode-se construir uma curva que representa o tempo pós morte e a diminuição da temperatura do corpo, com o passar do tempo.

A função que descreve este fenômeno é uma exponencial da forma: $\mathbf{f(t) = C.e^{A.\,t}}$

Curvas de aprendizagem:

Utilizada por psicólogos e educadores na descrição do processo de aprendizagem, as curvas exponenciais realizam um papel importante na avaliação dos estudantes.

A curva básica para este tipo de estudo é da forma: $\mathbf{f(x) = c - a.e^{-k.x}}$.

O número **e**

Você deve ter percebido que nas funções citadas anteriormente aparece o número **e**, mais conhecido como número de Euler, que foi estudado pela primeira vez por Leonhard Euler por volta de 1720, embora a sua existência esteja implícita nos trabalhos de John Napier, um dos inventores dos logaritmos. Euler também foi o primeiro a usar a letra **e**, em 1727, para designar esse número, que vale aproximadamente: **e = 2,71828182845...**

Esse número era dado pela série $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...$

Outra maneira de se obter o valor de **e** é construir o gráfico da função:

x	y
1	2
0,1	2,593742
0,01	2,704814
0,001	2,716924
0,0001	2,718146
...	...
0,0........1	**2,718281...**

Agora vamos relembrar algumas propriedades da potenciação e da radiciação.

POTENCIAÇÃO

Definição

Se $n \in N$ e $a \in R$, defini-se:

I. $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n fatores } n > 1}$

II. $a^1 = a$ e $a^0 = 1$

III. Se a 0, $a^{\frac{1}{n}} = a^{-n}$

Propriedades

1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2) $a^m \div a^n = a^{m+n}$ com $a \neq 0$

3) $a^n \times b^n = (a \times b)^n$

4) $a^n \div b^n = (a \div b)^n$ com $b \neq 0$

5) $(a^n)^m = a^{n \times m}$

RADICIAÇÃO

Definição

$\sqrt[n]{a} = x \Rightarrow x^n = a$

Propriedades

1) $\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

2) $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$

3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

4) $\sqrt[n]{a^m} \;\; \sqrt[p.n]{a^{p.m}} = (p \neq 0)$

5) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Potência de um expoente racional

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

É toda a equação do tipo , em que a base é um valor real positivo e diferente de 1, x_1 e x_2 variáveis reais.

Procedimento para resolver uma equação exponencial

$$a^{x_1} = a^{x_2}$$

simplifique a base
e iguale os expoentes

$$a^{x_1} = a^{x_2} \longrightarrow x_1 = x_2$$

Exemplos

I. Encontre o valor de x na equação:

Resolução:

$2^{x-3} = 16$

$2^{x-3} = 2^4$

$x - 3 = 4$

$x = 7$

II. (UFPR) Resolva a equação $3^x + 3^{4-x} = 82$.

Resolução:

$3^x + 3^{4-x} = 82$

$3^x + \dfrac{3^4}{3^x} = 82$

Substituição:

$3^x = y$

$y + \dfrac{81}{y} = 82$

$y^2 - 82y + 81 = 0$

raízes: $y' = 1 \Rightarrow 3^x = 1$ portanto $\mathbf{x' = 0}$

$y'' = 81 = 3^x = 81$ portanto $\mathbf{x' = 4}$

Inequações exponenciais

É toda inequação com uma ou mais incógnitas no expoente.

Exemplos:

$5^x \;\; 125$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x}$

As inequações exponenciais são resolvidas igualando-se suas bases e simplificando-se estas em seguida (como nas equações), porém devemos observar a regra a seguir:

> Se a **base 1** conserva-se o sentido da desigualdade.
>
> Se a **0 base 1** inverte-se-se o sentido da desigualdade.

EXEMPLOS

Resolva as inequações:

I. $2^{5x-10} > 32$

$2^{5x-10} > 2^5$

$5x - 10 > 5$

$5x > 15$

$\mathbf{x \;\; 3}$

II. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+3} < \dfrac{1}{9}$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+3} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}$

$x + 3 > 2$

$\mathbf{x > -1}$

EXERCÍCIOS

EXPONENCIAIS

01. (UEPG –PR) – A soma das raízes da equação $(2^x)^{x+3} = 16$ é:
   a) –3
   b) 4
   c) –4
   d) 0
   e) 3

02. (UTFPR) – Sendo **S** o conjunto dos x números reais que satisfazem à desigualdade $a^{2x-1} < a^{1-x}$, $0 < a < 1$, então **S** é, mais especificamente, o conjunto:
   a) $\{x \in IR / x \}$
   b) $\{x \in IR / x > \frac{2}{3}\}$
   c) $\{0\}$
   d) $\{x \in IR / -\frac{2}{3} < x < 0\}$
   e) $\{x \in IR / x = 5\}$

03. (UFPR) – $3^x + 3 = 82$, então x vale?

04. (UEL –PR) – Para todo x real, a expressão $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}$ é equivalente a:
   a) 3
   b) $5 \cdot 3^x$
   c) $6 \cdot 3^x$
   d) 243^x
   e) $364 \cdot 3^x$

05. (UEM –PR) – Considerando a função $f: A \subseteq IR \to IR$, definida por $f(x) = 5^{2x} - 4.5^x - 5$, é correto afirmar que:
   01) A = IR.
   02) $A = \{x \in IR / x < 1\}$.
   04) $f(x) < 0$, para todo x real, tais que $-1 < x < 5$.
   08) $f(x) > 0$, para todo x real, tais que $x > 1$.
   16) $f(-1) = -\frac{144}{25}$

06. (UEM –PR) – A inequação $3^{x+1} + 3^{x} - 3^{x-1} > 33$ tem conjunto solução:

07. (UEPG –PR) – Determine o conjunto solução da inequação exponencial $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x}{2}-1} \leq 0{,}25^{x-3}$

a) $]-\infty, 6]$
b) $]-\infty, 18]$
c) $[-6, +\infty[$
d) $[6, +\infty[$
e) $]-6, +\infty[$

08. (UEM –PR) – A equação $2^{4\sqrt{x}} - 17.2^{2\sqrt{x}} + 16 = 0$ possui duas raízes no conjunto dos números inteiros. A soma dessas raízes é......

09. (UFPR) – Se $2^{x} + 2^{-x} = 2$, então $8^{x} + 8^{-x}$ é igual a:

10. (UEL –PR) – Um barco parte de um ponto a com 2^{k} passageiros e passa pelos pontos B e C, deixando em cada um metade dos passageiros presentes no momento de chegada, e recebendo, em cada um, $2^{\frac{k}{2}}$ novos passageiros. Se o barco parte do ponto C com 28 passageiros e se N representa o número de passageiros que partiram de A, é correto afirmar que:

a) N é múltiplo de 7.
b) N é múltiplo de 13.
c) N é divisor de 50.
d) N é divisor de 128.
e) N é primo.

11. (UTFPR) Sejam as equações $4^{a+b} = \frac{1}{16}$ e $2^{a+b} + 2^{b-1} = \frac{3}{2}$, então o conjunto-solução é:
  a) {(–4,2); (–3,1)}
  b) {(–3,1); (–2,3)}
  c) {(–3,1); (–2,0)}
  d) {(–3,3); (–2,4)}
  e) {(0,-2); (1,–3)}

12. (UTFPR) – As raízes da equação $2^{2x} \cdot 3^{1-x} - 5.2^x + 2.3^x = 0$, estão contidas no intervalo:
  a) (–1,2]
  b) [–1,0)
  c) (–2,0)
  d) (1,2]
  e) [2,3)

AULA Nº 09

LOGARITMOS (I)

LOGARITMO DECIMAL

É o sistema cuja base é 10, também chamado de logaritmo **decimal**, vulgar ou de Briggs (em homenagem a Henry Briggs, matemático inglês, 1561-1630, que primeiro destacou o uso dos logaritmos decimais no cálculo). Para logaritmos decimais, costuma-se utilizar como símbolo log(x) ou lg(x), ou seja, omitimos a base 10.

LOGARITMO NEPERIANO

Os logaritmos criados por Napier em 1614 não dependiam da idéia de base porém estavam numericamente relacionados, embora não fossem iguais, aos logaritmos hoje chamados naturais ou neperianos.

Aos 21 anos, Euler escreveu:

"Para o número cujo logaritmo é 1, escreva **e**, que vale 2,71828181..."

$$\ell n(e) = 1 \ ou \ \log_e(e) = 1$$

A Constante **e** de Euler é um número irracional e positivo.

Logaritmos Definição

Chama-se logaritmo de um número numa base a, com a≠0 e a=1, o expoente x a que se deve elevar a base a para que a potência obtida seja igual a N.

$$\boxed{\log_a N = x \therefore a^x \quad N}$$

Exemplo:

Calcule o logaritmo de 16 na base 2:

Logo: $\log_2 16 = 4$

Condições de existência

N > 0 positivo

a > 0 e a ≠ 1

x qualquer valor real

Conseqüências da definição

1) $\log_a 1 = 0$
2) $\log_a a = 1$
3) $a^{\log^a} a^N = N$
Atenção!
4) $\log_1 N$ (não existe)
5) $\log_{-a} N$ (não existe)
6) $\log_a (-N)$ (não existe)

EXEMPLOS:

I. $\log_2 64$

$2^x = 64$

$2^x = 2^6$

$\mathbf{x = 6}$

II. In e^3

$\log_e e^3 = \mathbf{3}$

III. As indicações $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$, na escala Richter, de dois terremotos, estão relacionadas pela fórmula $R_1 - R_2 = \log N$, em que **N** mede a razão entre as energias liberadas pelos dois terremotos, sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Supondo que houve um terremoto correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 5$, então **N** é igual a:

Resolução:

$R_1 - R_2 = \log N$

$8 - 5 = \log N$

$3 = \log N$

$10^3 = N$

$\mathbf{N = 1000}$

Mudança de base

$$\boxed{\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}}$$

EXEMPLO:

I. (UFPR) – Sendo $\log_{10} 3 = b$, então $\log_{100} 27$ é igual a:

Resolução:

$$\log_{100} 27 = \frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 100} = \frac{\log_{10} 3^3}{\log_{10} 10^2} = \frac{3.\log_{10} 3}{2.\log_{10} 10} = \frac{3.b}{2}$$

Observe:

I. A nova base deve ser positiva e diferente de um.

II. O **N** continua sendo logaritmando e, o **a** passa a ser logaritmando (deixa de ser base).

EXERCÍCIOS

01. (UEL –PR) – O valor da expressão

$$\frac{\log_3 1+\log_{10} 0{,}01}{\log_2 \frac{1}{64}.\log_4 \sqrt{8}}$$ é:

02. (UEPG –PR) – Sendo:

$(25)^{p-2} = \dfrac{1}{125}$

$q = \log_{16} 8$

$r = \dfrac{\log_2 4}{\log_3 27}$

É correto afirmar que:

01) $p < r < q$
02) $q > p$
04) $r < q$
08) $p > r$
16) $r < p < q$

03. (UFPR) – Sendo $\log_{10} 3 = b$, então $\log_{100} 27$ é igual a:

a) b^2

b) b^3

c) $\dfrac{3b}{3}$

d) $\dfrac{3b}{2}$

e) $2b$

04. (UTFPR) – O conjunto solução da equação $(\log_2 4)2^x + (\log_2 \frac{1}{2})2^x - (\log 100)4^x = 0$ é:

a) $0, \frac{1}{2}$

b) $0,\ 1$

c) $-1, \frac{1}{2}$

d) $\{-1\}$

e) $\{0\}$

05. (UTFPR) – O valor de $\log_x \dfrac{64}{25}$ quando $x = \log_a a$ é:

a) $\dfrac{5}{8}$

b) 2

c) -3

d) $\dfrac{8}{5}$

e) -2

06. (UEM –PR) – Dadas as expressões $log_2\, x = a$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^y = b$, é correto afirmar que:

01) $\log x = a$.
02) x deve ser um número real não negativo.
04) a é sempre um número positivo.
08) y pode assumir qualquer valor real.
16) $\log_8 x = \dfrac{a}{3}$.
32) os valores de a aumentam à medida que os valores de x aumentam.
64) os valores de b aumentam à medida que os valores de y aumentam.

07. (UEM –PR) – Sobre logaritmos e exponenciais, é correto afirmar que:

01) $\log_2\left(\log_3 \frac{1}{9}\right) = -1.$

02) $\log_a(a^3) = 3$, para todo número real positivo a, tal que $a \neq 1$.

04) $3^x \cdot 3^x = 3^x$, para todo número real x.

08) $\log_{16} 128 + \log_{16} \frac{1}{32} = \frac{1}{2}.$

16) o valor de x IR para o qual $3^x = 8$ é tal que $\log_4 x = 1$.

32) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^x$, para todo número real x.

08. (UEM –PR) – Assinale a(s) alternativas(s) correta(s).

01) $\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = n^{-2}$, para n inteiro, com $n \geq 2$.

02) $\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} = -3.$

04) $2^x - 2^{x+1} + 2^{x+3} < \frac{7}{8}$, para $x < -3$.

08) $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

16) $3\sqrt{10} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - 3} = -10.$

32) $\sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}}} = 4$, para algum $x \neq 0$.

09. (UNIOESTE –PR) – De acordo com as definições e prioridades das funções logarítmicas e exponenciais, no conjunto dos números reais, é correto afirmar que:

01) a solução da equação $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = 1$ é $x = \frac{1}{2}$

02) o valor de $\frac{10}{10^{\log 10\left(\frac{1}{10}\right)}}$ é 1.

04) o valor de x para que $2^x = \sqrt{\frac{1}{32}}$ é $x = -\frac{5}{2}$

08) a equação $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 0$ não possui solução.

16) a solução de equação $\log_3 x = 4$ é $x = 12$.

32) a única solução de equação $3.2^{2x} - 2^x - 2 = 0$ é $x = 0$.

10. (UFPR) – Sendo *a*, *b* e *c* números reais tais que $3^a = 2^b$, $9^b = 4^c$ e $a \neq 0$, é correto afirmar:

01) $b = c\log_2 3$.

02) Se $a = 2$, então b 3.

04) **a**, **b** e **c**, nesta ordem, estão em progressão geométrica.

08) $a + b = a\log_2 6$.

16) $3^{a+2b} = 2^{b+2c}$.

11. (UFPR) – Com base nos estudos de logaritmos e exponenciais é correto afirmar:

I. $\log_2(4!) = 3 + \log_2 3$

II. Se a, b, x, y são números reais tais que $3^x + 3^y = 2^a$ e $3^x - 3^y = 2b$, então $x + y = \log_3 (a^2 - b^2)$.

III. A soma de todos os valores reais de x e y que verificam as igualdades $2^{x^2} = 16$ e $(2^y)^2 = 64$ é igual a 5.

IV. $\log_{\frac{1}{2}} 32 = 5$.

a) I e II são verdadeiras.
b) I e IV são verdadeiras.
c) Todas são verdadeiras.
d) Todas são falsas.
e) II, III, IV são verdadeiras.

12. (UFPR) – Se a e b são números reais positivos diferentes da unidade e $(\log_a b) . (\log_b a) = x$, então:

a) $x = 1$

b) $x = a + b$

c) $x = a . b$

d) $x = \frac{b}{a}$

e) $x = \frac{a}{b}$

13. (UEPG –PR) – A expressão $\log 81 + \log_{10} 0{,}001 + \log_{10}$ vale:

a) $-\frac{4}{3}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $-\frac{20}{3}$

d) $-\frac{21}{3}$

e) $-\frac{19}{3}$

14. (UEM –PR) – Determine a soma das afirmativas verdadeiras.

01) $\log 0{,}001 = -3$

02) $2 \log 3 + 3 \log 2 = \log 72$

04) $\log_3 7 \, . \, \log_7 2 = \log_3 2$

08) $\log \sqrt{8} = \frac{3}{2} . \log 2$

16) Se $\log 10 = 1$ e $\log 2 < 0{,}5$, então $\log 5 < 0{,}5$

32) A razão entre o logaritmo de 25 e o logaritmo de 5, numa base qualquer (positiva e diferente de 1), é 5.

AULA Nº 10

LOGARITMOS (II)

Propriedades Operatórias

$\log_a (A.B) - \log_a A + \log_a B$

$\log_a \left(\frac{A}{B}\right) - \log_a A - \log_a B$

$\log_a A^m = m \ . \log_a A$

$co \log_a A = - \log_a A$

EXEMPLOS:

I. Dados $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule:

$\log 12 = \log(2^2.3) = \log 2^2 + \log 3 = 2\log 2 + \log 3$

$= 2.0{,}30 + 0{,}48 =$ **1,08**

II. $\log 5 = \log(10/2) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}30 =$ **0,70**

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

É toda a equação do tipo $\log_a x_1 = \log_a x_2$, em que a base é um valor real positivo e diferente de 1, x_1 e x_2 variáveis reais positivas.

Procedimento para resolver uma equação exponencial

$\log_a \mathbf{x_1} = \mathbf{\log_a x_2}$
$\log_a x_1 = \log_a x_2 \xrightarrow[\text{iguale os logaritmos}]{\text{simplifique os } \log_a \text{ e}} x_1 = x_2$

EXEMPLOS:

I. Resolva a equação a $\log_2 (x-1) + \log_2 (x-2) = 1$

Resolução:

$\log_2 (x - 1) + \log_2 (x - 2) = 1$

$\log_2 (x - 1).(x - 2) = 1$

$x^2 - 3x + 2 = 2^1$

$x^2 - 3x = 0$

raízes: $x' = 0$ (não verifica) $\mathbf{x'' = 3}$ (verifica)

$\mathbf{S = \{3\}}$

II. A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático:

$\mathbf{h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)}$, com **h (t)** em metros e **t** em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de:

Resolução:

$h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$

$3{,}5 = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$

$2 = \log_3 (t + 1)$

$3^2 = t + 1$

$\mathbf{t = 8}$

Inequações logarítmicas

As inequações logarítmicas são resolvidas igualando-se suas bases e simplificando-se estas em seguida (como nas equações), porém devemos observar a regra a seguir:

Se a **base** $> \mathbf{1}$ conserva-se o sentido da desigualdade.

Se a $\mathbf{0} <$ **base** $< \mathbf{1}$ inverte-se-se o sentido da desigualdade.

EXERCÍCIOS

01. (UEM –PR) - Considere $a = \log 2$, $b = \log 4$, $c = \log 8$. É incorreto afirmar que:

a) a + b   c.

b) a, b e c estão em progressão aritmética.

c) 10^a, 10^b e 10^c estão em progressão geométrica.

d) $10^a + 10^c = 10$.

e) a média aritmética entre a, b e c é 2a.

02. (UTFPR) – A expressão

$3 \ . \log_6 2 + \log_6 15 - \log_6 10 + \dfrac{1}{\log_3 6}$ vale:

03. (UEL –PR) – O log 125 é igual a:

a) 100 . log 12,5
b) 5 . log 3
c) 3 . log 25
d) 3 – 3log 2
e) (log 25) . (log 5)

04. (UFPR) – Nesta questão, considere x- número real; e – base do logaritmo neperiano, ℓn – logaritmo neperiano; log – logaritmo na base 10. Determine a soma dos números associados às afirmativas corretas.

I. $\sqrt{16x^{16}} = 4x^4$, para todo x.

II. Se $4^x = 10$, então $2^x = 5$.

III. $e = {}^{2\,\ell n x} = x^2$, para todo x0.

IV. Se ℓn x = 3, então $e^x = 3$.

V. log 10 = 4.

IV) $\left|\log\left(\frac{1}{10}\right)\right| = \log\left(\frac{1}{10}\right)$

a) Todas são verdadeiras.
b) Todas são falsas.
c) Apenas II e V são verdadeiras.
d) Apenas III é verdadeira.
e) Apenas I é verdadeira.

05. (UEPG –PR) – Assinale o que for correto.

01) As raízes da função $f(x) = x^2 - 3x - 4$ são os dois primeiros termos de uma P.A. decrescente. Então, o terceiro termo dessa P.A. vale 15.

02) A sucessão (s, 2s, 3s,.........), com s > 0, é uma P.G. crescente.

04) A razão da P.G. (e^x, e^{2x}, e^{3x},..........) é e^x.

08) Numa P.A. de número ímpar de termos, o primeiro termo é 3 e o último termo é 27. Assim, o termo médio dessa P.A. vale 15.

16) A razão da P.A. (log4, log12, log36,.........) é log3.

06. (UFPR) – O nível sonoro de um som de intensidade I, medido em decibéis, é calculado pela fórmula $10 \times \log\frac{I}{I_0}$ onde log representa logaritmo na base 10, e I_0 é um valor de referência que corresponde aproximadamente à menor intensidade de som audível ao ouvido humano. Com base nessas informações, é correto afirmar:

01) Se um som tem intensidade I_0, então o seu nível sonoro é igual a zero.

02) Um som de 1 decibel tem intensidade igual a $10 \times I_0$.

04) Um som de 40 decibéis tem intensidade igual a $10000 \times I_0$.

08) Se um som tem nível sonoro de 10 decibéis, então outro som que é dez vezes mais intenso que aquele tem nível sonoro igual a 100 decibéis.

16) Se três sons têm níveis sonoros de 50, 60 e 70 decibéis, e suas intensidades são, respectivamente, I_1, I_2 e I_3, então esses números formam, nessa ordem, uma progressão geométrica.

07. (UEM –PR) – Considerando-se a P.A.

$(\log 2, \log 3, \log \frac{9}{2}, \log \frac{27}{4}, ...)$

Pode-se afirmar que:

01) $a_7 - a_8 = \log \frac{3}{2}$

02) o sétimo termo é igual a 6log 6 – 5log 2.

04) a P.A. é decrescente.

08) a razão da P.A. é $\frac{3}{2}$

16) o termo geral é dado por $\log \left[2.\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]$

32) o produto dos dois primeiros termos é log 6.

08. (UFPR) – Sejam x e y números reais tais que: $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ \log x + 2 \log y = -5 \end{cases}$

Onde o símbolo "log" indica logaritmo na base 10. Nessas condições, é correto afirmar que:

I. $x \, . \, y = 10^{-3}$

II. $x - y = 9/100$

III. $x \, . \, y^2 = 10^{-5}$

a) Todas são falsas.
b) I e III são falsas.
c) Todas são verdadeiras.
d) Apenas I é verdadeira.
e) Apenas II é verdadeira.

09. (UTFPR) – Na Engenharia Florestal, uma das maneiras de se estimar o volume de uma árvore é através da utilização da equação:
$\ell n\, V = -14{,}46 + 1{,}66 \;\ell n\, d + 2{,}77\, \ell n\, h$.

Onde "d" é o diâmetro da árvore a 1,3m do chão, "h" é a altura e "In" significa logaritmo neperiano. Usando a teoria dos logaritmos, esse volume pode ser explicitado pela formula:

a) $V = (-14{,}46) \,.\, d^{1,66} \,.\, h^{2,77}$
b) $V = e^{14,46} \,.\, d^{1,66} \,.\, h^{2,77}$
c) $V = d^{-12,8} \,.\, h^{2,77}$
d) $V = e^{-14,46} - d^{1,66} \,.\, h^{2,77}$
e) $V = e^{-14,46} \,.\, (d.h)^{4,43}$

10. (UFPR) – Com base nos estudos de exponenciais e logaritmos, é correto afirmar que:

I. Se $8^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ $x = \frac{2}{3}$

II. Se $3^x + 3^{-x} = 3$, então $9^x + 9^{-x} = 9$.

III. Se $A = \log_{10}(x + 5)$, então A é um número positivo somente se $x > 0$.

IV. Se a, b, c nessa ordem, são números positivos em P.G. então os números $\log_e a$, $\log_e b$, $\log_e c$, nessa ordem, estão em P.A.

a) Todas estão corretas.
b) Somente I está correta.
c) Somente IV está correta.
d) Somente I e II estão corretas.
e) Somente I e IV estão corretas.

11. (UNIOESTE –PR) – Sejam a, b e c números reais positivos e diferentes de 1. Sabendo que $\log_a b = 2$ e $\log_a c = 6$, é correto afirmar que:

01) $b < c$.

02) $\log_a \sqrt{b} = 1$.

04) $\log_a (b + c) = 8$.

08) $\log_c a = \frac{1}{6}$

16) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = -4$.

32) $\log_a (2b) + \log_a \left(\frac{c}{2}\right) = 8$.

12. (UFPR) – Sendo log 2 = 0,301 e log 7 = 0,845, qual será o valor de log 28?

a) 1,146
b) 1,447
c) 1,690
d) 2,107
e) 1,107

13. (UTFPR) – Dados log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, o valor mais próximo de x real na equação $3 + 6^x \cdot 4 = 183$ é:

a) 1,93
b) 2,12
c) 2,57
d) 2,61
e) 2,98

14. (UEL –PR) – Admitindo-se que $\log_5 2 = 0{,}43$ e $\log_5 3 = 0{,}68$, obtem-se para $\log_5 12$ o valor:

a) 1,6843
b) 1,68
c) 1,54
d) 1,11
e) 0,2924

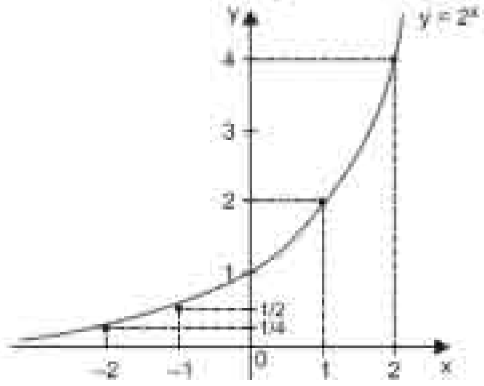
AULA Nº 11

LOGARITMOS (III)

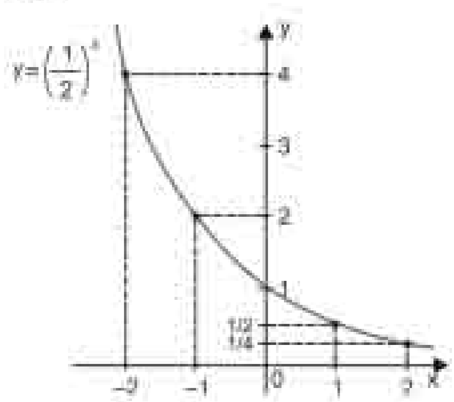
Funções Exponenciais

É toda função f: IR → IR do tipo $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Se a base **a > 1**, a função será **crescente**.



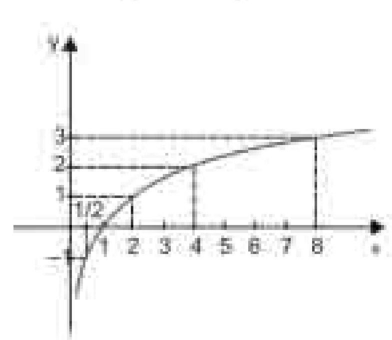
Se a base **0 < a < 1**, a função será **decrescente**.



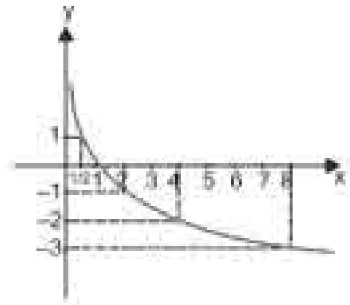
Funções Logarítmicas

É toda função f: IR → IR do tipo $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

Se a base **a > 1**, a função será **crescente**.



Se a base **0 < a < 1**, a função será **decrescente**.



EXERCÍCIOS

01. (UTFPR) – Considerando as funções, exponencial $f(x) = a^x$ e logarítmica $g(x) = \log_a x$, assinale a alternativa correta.

a) O conjunto domínio de $f(x) = a^x$ é $D = IR_+$

b) O conjunto imagem de $g(x) = \log_a x$ é $Im = IR$

c) O conjunto domínio de $g(x) = \log_a x$ é $D = IR$

d) O conjunto imagem de $f(x) = a^x$ é $Im = IR_+$

e) O conjunto domínio de $f(x) = \log_a x$ é $D = IR_+ - 1$

02. (UTFPR) – Cientistas de um certo país, preocupados com as possibilidades cada vez mais ameaçadoras de uma "guerra biológica", pesquisam uma determinada bactéria que cresce segundo a expressão $P(t) = \frac{256}{125}\left(\frac{5}{2}\right)^{t+1}$, onde t representa o tempo em horas. Para obter-se uma população de 3.125 bactérias, será necessário um tempo, em horas, com valor absoluto no intervalo:

a)]0,2]

b)]2,4]

c)]4,6]

d)]6,8]

e)]8,10]

03. (UFPR) – Uma determinada substância radioativa desintegra-se com o tempo, segundo a função:

$$M(t) = M_0 \cdot e^{kt}$$

Sendo M_0 a massa inicial, k uma constante característica da substância e t o tempo dado em anos. Sabendo que a quantidade inicial de 100g dessa substância radioativa diminui para 50g em 28 anos, calcule quanto tempo será necessário para que 100g dessa substância se reduzem a 25g. (Considere $\log_e 2 = 0{,}7$)

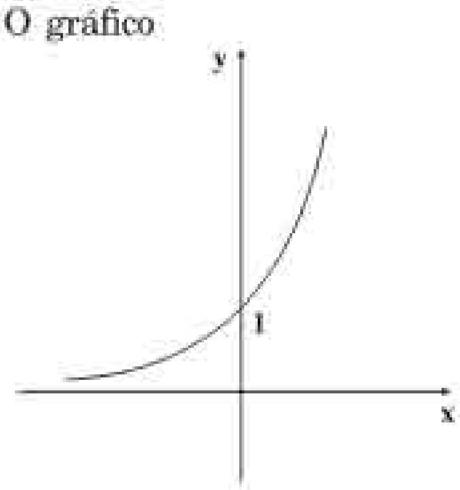
a) 56 anos
b) 48 anos
c) 72 anos
d) 42 anos
e) 64 anos

04. (UEPG –PR) – Assinale o que for correto.

01) Se $2^x = 10$, então $x = \dfrac{1}{\log 2}$

02) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{0,7} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^{0,6}$

04) O gráfico



representa a função $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

08) Se $\log_{0,01} x = -2$, então $x = 0{,}0001$.

16) Se $\log_5 a + \log_5 b = 2$, então $a.b = 25$.

05. (UNICENTRO –PR) – A escala Richter é uma escala logarítmica para medir a intensidade de um terremoto. Segundo essa escala, a intensidade de um terremoto pode ser calculada pela fórmula $I = \dfrac{2}{3}\log 10\left(\dfrac{E}{k}\right)$, onde E é a energia liberada pelo terremoto e k é uma constante, sendo E e k medidas em quilowatt-hora (kWh). Considerando que, em uma cidade Y, a energia liberada por um terremoto foi dez vezes maior que a energia liberada por outro terremoto em uma cidade X, e sendo I_y e I_x, respectivamente, as intensidades desses terremotos, é correto afirmar:

a) $I_Y = 10 \,.\, I_X$

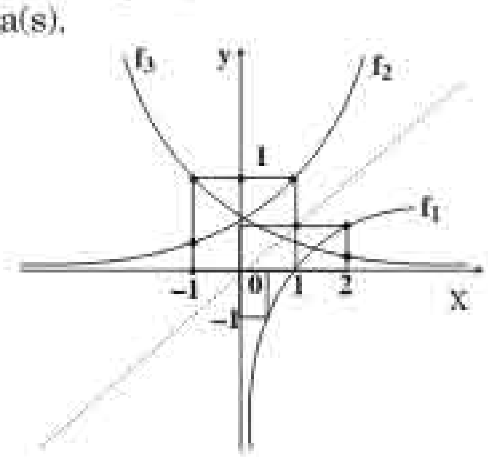
b) $I_Y = \dfrac{2}{3}(1 + I_X)$

c) $I_Y = \dfrac{2}{3} + I_X$

d) $I_Y = 10 + I_X$

e) $I_Y = \dfrac{20}{3} + I_X$

06. (UEM –PR) – Observe os gráficos das funções f_1, f_2, f_3, onde duas delas são exponenciais. Nessas condições, assinale a(s) alternativa(s) correta(s).



01) As funções f_1, f_2, f_3 possuem o mesmo domínio.

02) O conjunto-imagem de f_1 é igual ao domínio de f_3.

04) As funções f_2 e f_3 são inversas uma da outra.

08) As bases de f_1, f_2 e f_3 são iguais a 2.

16) $4f_2(1) - 2f_3(1) + 4f_1\left(\dfrac{1}{2}\right) - f_2(-1) + f_3(-1) = \dfrac{9}{2}$

32) $(f_2 \circ f_3)(-1) =)\ (f_1\ \ f_2)\ (4)$.

07. (UFPR) – Uma cidade cuja população vem diminuindo sistematicamente tem hoje 30000 habitantes. Se o ritmo de diminuição se mantiver, então o número de habitante daqui a t anos, P(t), é calculado aplicando-se a fórmula: $P(t) = 30000(0,9)^t$. Supondo que o ritmo de diminuição se mantenha, é correto afirmar:

01) Daqui a 2 anos, a população será menor que 24000.
02) Os números P(1), P(2), P(3),......,nesta ordem, formam uma progressão geométrica.
04) O tempo necessário, em anos, para que a população se reduza à metade da atual é $\frac{\log 1 - \log 2}{\log(0,9)}$.
08) P(20) = 0.
16) Em cada período de um ano a população diminui 10%.

08. (UEL –PR) – Um empresário comprou um apartamento com intenção de investir seu dinheiro. Sabendo-se que esse imóvel valorizou 12% ao ano, é correto afirmar que seu valor duplicou em, aproximadamente:

(Dados: $\log_{10}2$ 0,30 e $\log_{10}7$0,84)

a) 3 anos
b) 4 anos e 3 meses
c) 5 anos
d) 6 anos e 7 meses
e) 7 anos e 6 meses

09. (UNICENTRO –PR) – Uma célula se duplica a cada 3 horas. Depois de quantas horas, aproximadamente, existirão 216 células?

(Dados: In3 ≅ 1,1; In2 ≅ 0,7)

a) 23
b) 44
c) 63
d) 72
e) 108

10. (UEL –PR) – O valor de um automóvel (em unidades monetárias), sofre uma depreciação de 4% ao ano. Sabendo-se que o valor atual de um carro é de 40.000 unidades monetárias, depois de quantos anos o valor desse carro será de 16.000 unidades monetárias? Use o valor 0,3 para log 2 e o valor 0,48 para log 3.

a) 3
b) 6
c) 10
d) 15
e) 20

11. (UTFPR) – Seja A a imagem da função $f(x) = 2^{(x+1)}$ e B o domínio da função $g(x) = \log_2 (x + 1)$. O conjunto B – A é:

a) $\{x \in IR / -1 \leq x \leq 0\}$
b) $\{x \in IR / -1 < x \leq 0\}$
c) $\{x \in IR / -1 \leq x < 0\}$
d) $\{x \in IR / -1 < x < 0\}$
e) $\varnothing$

12. (UEPG –PG) – Dada a função $f(x) = 5^{x+1}$, assinale o que for correto.
   01) É uma função crescente.
   02) $f(-a) = \dfrac{5}{f(a)}$
   04) $f(a+1) = 5f(a)$.
   08) Se $f(x) = 5\sqrt{5}$, então $x = \dfrac{1}{2}$.
   16) Seu gráfico intercepta o eixo y no ponto (0,5).

13. (UNIOESTE) – A quantia de R$ 5.000,00 é aplicada à taxa fixa de 2% ao mês. Em se tratando de juros compostos e não havendo retirada, o número de meses necessários para que o montante ultrapasse R$ 7.000,00 é:
   Considere log102 = 2,008 e log14 = 1,146.

AULA Nº 12

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A)

Uma seqüência ($\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n}$) de números reais, com a_1=primeiro termo, a_2=segundo termo, a_3=terceiro termo, assim sucessivamente até o último termo a_n, é uma progressão aritmética (P.A), se a diferença entre um termo qualquer a partir do segundo, pelo seu antecessor imediato, produzir um resultado (resto) constante real, denominado razão (r) da progressão.

$$\begin{aligned} r &= a_2 - a_1 \\ r &= a_3 - a_2 \\ r &= a_4 - a_3 \\ &\vdots \\ r &= a_n - a_{n-1} \end{aligned}$$

Exemplo:

I. Verificar se a seqüência (2, 4, 6, 8, 10) é uma progressão aritmética (P.A) de razão 2.

Resolução

$\mathbf{r = a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2}$

$\mathbf{r = a_3 - a_2 = 6 - 4 = 2}$

$\mathbf{r = a_4 - a_3 = 8 - 6 = 2}$

$\mathbf{r = a_5 - a_4 = 10 - 8 = 2}$

A constante 2, obtida pela diferença, conforme mostra quadro, define a seqüência como uma progressão aritmética (P.A) de razão.

FÓRMULA GERAL DA RAZÃO (r)

$\mathbf{r = a_{n+1} - a_n}$ $(n \in N_+)$

Classificação de uma Progressão Aritmética

Seja r a razão de uma progressão aritmética (P.A), temos que:

P.A estritamente crescente $(r > 0)$

P.A estritamente decrescente $(r < 0)$

P.A constante $(r = 0)$

Fórmula do Termo Geral *de uma Progressão Aritmética (P.A)*

A definição de progressão aritmética (P.A), sugere que:

$\mathbf{a_2 = a_1 + 1r}$

$\mathbf{a_3 = a_1 + 2r}$

$\mathbf{a_4 = a_1 + 3r}$

$\mathbf{a_5 = a_1 + 4r}$

$\mathbf{a_6 = a_1 + 5r}$

e assim sucessivamente

Generalizando para termo de ordem n (n = ao número de termos da progressão), temos a fórmula geral:

$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1).r}$

Podemos ter um termo de ordem n relacionado com qualquer outro termo antecessor de ordem k. Neste caso a fórmula do termo geral abrangente, é:

$$\boxed{\mathbf{a_n = a_k + (n-k).r}}$$

Por exemplo:

I. Na seqüência (10, 6, 2, ...), calcular o décimo termos.

Resolução:

$r = a_2 - a_1 = 6 - 10 = -4$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_{10} = a_1 + (10 - 1)r$

$a_{10} = 10 + 9(-4)$

$a_{10} = 10 - 36$

$a_{10} = -26$

Progressão Aritmética com ***Três Termos (artifício)***

Forma simplificada para a representação de uma progressão aritmética com três termos em duas variáveis.

$\mathbf{x - r, \quad x, \quad x + r}$

EXERCÍCIOS

01. (UFPR) – Qual o número de termos de uma progressão aritmética, na qual o 1º termo é 10, o último 60 e cuja razão é 5?

a) 9
b) 10
c) 11
d) 12
e) 13

02. (UEM –PR) – O sétimo termo de uma progressão aritmética é 20 e o décimo é 38. Então o primeiro termo é:
 a) 16
 b) 15
 c) 17
 d) -17
 e) -16

03. (UNIOESTE –PR) – Considerando os números 68 e 36, é correto afirmar:
 01) que 4 é o máximo divisor comum de 36 e 68.
 02) que 17 é o máximo divisor comum de 36 e 68.
 04) que 4 é o mínimo divisor comum de 36 e 68.
 08) que 612 é o máximo múltiplo comum de 36 e 68.
 16) que 2 é o mínimo múltiplo comum de 36 e 68.
 32) que 0 é um múltiplo comum de 36 e 68.
 64) que, se 36 e 68 são os dois primeiros termos de uma progressão aritmética, o quarto termo é 132.

04. (UEM –PR) – Os lados de um triângulo formam uma progressão aritmética de razão 2 e um ângulo deste triângulo mede 120º. Então, o perímetro desse triângulo é.....

05. (UTFPR)- Num hexágono, os ângulos internos estão em progressão aritmética. A soma, em radianos, dos 3º. e 4º. Termos dessa progressão é:
 a) $\frac{7\pi}{6}$
 b) $\frac{2\pi}{3}$
 c) $\frac{4\pi}{3}$
 d) $\frac{5\pi}{4}$
 e) $\frac{\pi}{6}$

06. (UNIOESTE –PR) – A sucessão numérica S dos números 1, 3, 8, 16, 27, ..., an, ... possui a propriedade de que as diferenças dn = an+1 – an com n = 1, 2, 3, ... formam uma P.A.
O valor de $a_{30} - a_{29}$ é igual a:

07. (UTFPR) – Sabendo-se que os termos de uma seqüência são definidos por
$a_n = n \cdot a \cdot b^{-n}$, o quociente entre o 5º e o 8º termo é:

a) $\frac{8b^{-3}}{5}$

b) $\frac{5b^{-3}}{8}$

c) $5ab^3$

d) $\frac{5b^{-3}}{8}$

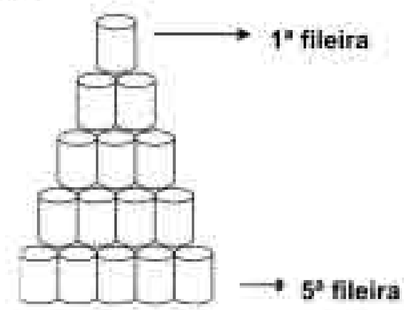
e) $8ab^{-3}$

08. (UEM –PR) – Sabendo-se que uma seqüência na é dada por (1050, 1048, 1046, 1044,...) e que uma seqüência b é dada por (110, 118, 126, 134, ...), então o valor de s para o qual $a_s = b_s$ é...

09. (UNICENTRO –PR) – Na seqüência f(n), n **N**, tem-se f (0)= 1 e f (n + 1)= f (n) +3. Portanto, o valor de f(100) é igual a:

a) 89
b) 99
c) 297
d) 298
e) 301

10. (UEL –PR) – Em um supermercado as latas de certos produtos são expostas em pilhas, encostadas em uma parede, com 1 lata na primeira fileira (a superior), 2 latas na segunda fileira, 3 latas na terceira e assim por diante. Observe a figura abaixo uma dessas pilhas com, com 5 fileiras.



Se uma pilha tem um número ímpar de fileiras e a fileira do meio tem 7 latas, o total de fileiras é:

a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

11. (UEPG –PR) – Na progressão aritmética em que $a_3 = 13$ e $a_{16} = 143$, a razão vale:

a) $\frac{1}{2}$

b) –1

c) –2

d) 1

e) 10

12. (UEL –PR) – Uma criança anêmica pesava 8,3 kg. Iniciou um tratamento médico que fez com que engordasse 150 g por semana durante 4 meses. Quanto pesava ao termino da 15ª semana de tratamento?
   a) 22,50 kg
   b) 15 kg
   c) 10,7 kg
   d) 10,55 kg
   e) 10,46 kg

13. (UFPR) – Dada a função f: IN → IN, definida para todo n, (n número natural) por $f(0) = 1$, $f(n+1) = f(n) + 2$. O valor de f(300) é:
   a) 301
   b) 202
   c) $(300)^2 + 1$
   d) 333 000
   e) 601

14. (UTFPR) – Inserindo-se **k** meios aritméticos entre 1 e k^2, nesta ordem, obtém-se uma progressão aritmética de razão:
   a) 1
   b) k
   c) k - 1
   d) k + 1
   e) k^2

15. (UFPR) – O valor não nulo de x para que os números $x^2 + 10$, $9x$, $x - 10$, nesta ordem sejam termos consecutivos de uma progressão aritmética é: